Intelligere, Revista de História Intelectual
ISSN 2447-9020 - v. 2, n. 1 [2], 2016

ARTIGOS - ARTICLES

Introduction a une histoire conceptuelle de théories de Galois[1]

Julien Page
SPHERE – UMR 7219, Université Paris Diderot – CNRS, Paris, France,
ERC Philodophy of Canonical Quantum Gravity

Recebido em 01/04/2016. Aprovado em 20/04/2016.
Como citar este artigo: Page, Julien. "Introduction a une histoire conceptuelle de théories de Galois". *Intelligere, Revista de História Intelectual*, São Paulo, v. 2, n. 1 [2], p. 20-33. 2016. ISSN 2447-9020. Disponível em <http://revistas.usp.br/revistaintelligere>.http://dx.doi.org/10.11606/issn.2447-9020.intelligere.2016.113739 Acesso em dd/mm/aaaa.

Résumé: Dans cet article, nous motivons la perspective d'une épistémologie historique des mathématiques à partir d'une filiation Hegel – Bachelard – Cavaillès – Lautman. Nous proposons alors d'articuler conceptuellement trois types historiques de théories de Galois qui ont été formulées de 1830 à la fin du XXème siècle et que nous nommons : 1) les théories heuristique de Galois, 2) les théories structurales de Galois et 3) les théories catégoriques de Galois. Pour cela on utilise des "opérateurs historiques", dont en particulier ceux de Cavaillès – le "paradigme" et la "thématisation" – et on analyse les liens de notre approche avec l'épistémologie historique de Bachelard, que l'on contribue ainsi à renouveler.

Mots clés: Bachelard, théories de Galois, épistémologie historique.

Introdução a uma história conceitual das teorias de Galois

Resumo: Nesse artigo, defendemos a perspectiva de uma epistemologia histórica das matemáticas a partir de uma filiação Hegel - Bachelard - Cavaillès - Lautman. Propomos articular conceitualmente três tipos históricos de teorias de Galois que foram formuladas entre 1830 e o fim do século XX, as quais nomeamos: 1) as teorias heurísticas de Galois, 2) as teorias estruturais de Galois e 3) as teorias categóricas de Galois. Para isso, utilizamos "operadores históricos", em particular aqueles de Cavaillès - "paradigma" e "tematização" - e analisamos os laços entre nossa abordagem e a epistemologia histórica de Bachelard, que, dessa maneira, ajudamos a renovar.

Palavras-chave: Bachelard, teorias de Galois, epistemologia histórica.

[1] The research leading to these results has received funding from the European Research Council under the European Community's Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013 Grant Agreement n°263523).

.

Introduction to a conceptual history of theories of Galois

Abstract: In this work, we support the idea of a Historical Epistemology of Mathematics by establishing a filiation Hegel – Bachelard – Cavaillès – Lautman. We propose to analyse three historical types of Galois theories formulated from the 1830s to the 2000s, which we name: 1) heuristic Galois theories, 2) structural Galois theories and 3) categorical Galois theories. To do that, we use ''historical operators'', in particular those of Cavaillès – ''paradigm'' and ''thematization'' – and we analyse the links of our approach with the Historical Epistemology of Bachelard, which we contribute to renew.

Keywords: Bachelard, Galois theories, Historical Epistemology.

.

Introduction

L'opposition entre philosophie analytique et philosophie continentale a connu depuis quelques décennies un affaiblissement certain – sans pour autant disparaître complètement. La question de l'histoire fut dès l'origine un point de partage décisif. En ce qui concerne la dimension épistémologique de cette origine, il faut évoquer le contexte de la révolution scientifique opérée par la relativité d'Einstein au tout début du XXème siècle, qui imposa aux différentes écoles de la théorie de la connaissance de réviser leurs fondements. Deux courants parallèles ont alors vu le jour : l'épistémologie historique de Bachelard qui s'est surtout développée en France, mais aussi en Suisse et en Italie et le positivisme logique du cercle de Vienne (à partir des travaux de Russell, Wittgenstein et Frege) qui eut énormément de succès dans le monde anglo-saxon. D'un côté, il y a eu en France le courant de l'épistémologie historique avec des auteurs comme Bachelard, Canguilhem et Foucault et dont on peut trouver des influences allemandes au siècle précédent – bien qu'avec souvent une grande liberté des emprunts conceptuels -, avec notamment la dialectique de Hegel et la méthode généalogique de Nietzsche. D'un autre côté, la philosophie analytique s'est édifiée notamment à partir de la réaction de Russell à cette logique dialectique et à la promotion de la logique mathématique anhistorique, comme objet privilégié et modèle d'expression rationnelle. Histoire *versus* logique. Cette opposition souvent entretenue par des ignorances réciproques, des malentendus ou des conflits générationnels a été peu à peu mise à mal. En France, des auteurs comme Vuillemin, Gilles-Gaston Granger et plus récemment Salanskis se sont référés positivement à la philosophie analytique. Aux Etats-Unis dans les années 1960, Kuhn a dressé un bilan négatif du positivisme logique et a promu le rôle de l'histoire dans l'étude des sciences, lançant comme un appel au rapprochement entre les deux courants – qui n'eut pas lieu. Depuis les années 1990, des philosophes des sciences anglo-saxons – comme Hacking, Davidson ou Daston – ont investi la dimension historique avec force, contribuant ainsi à reconfigurer les anciennes cartes.[2] Ainsi Hacking se réfère-t-il aussi bien à la perspective historique de Foucault qu'aux outils logiques de Wittgenstein et d'Austin.[3]

---

[2] Pour un panorama de l'évolution de l'épistémologie historique, voir par exemple, Vincent Bontems, "L'actualité de l'épistémologie historique", *Revue d'histoire des sciences*, [Vol.] 59, 1 (2006): (137-147) et Anastasios Brenner, "Quelle épistémologie historique ? Kuhn, Feyerabend, Hacking et l'école bachelardienne", *Revue de métaphysique et de morale,* 49 (2006): (113-125).

[3] Ian Hacking, *Historical Ontology* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 2002), 70-71.

Or la question de l'objectivité mathématique reste problématique pour les différentes perspectives historiques qu'on a citées. Dans le passage de Bachelard à Canguilhem, puis à Foucault – et du côté américain Hacking –, les objets mathématiques s'éloignent de plus en plus du centre des préoccupations. Il est vrai que la question de l'historicité fait peut-être plus problème pour les mathématiques que pour les autres sciences. Ainsi, Foucault déclarait-il que les mathématiques étaient la seule science pour laquelle sa méthode archéologique ne pouvait pas s'appliquer, car elles ont « franchi d'un seul coup le seuil de la positivité ».[4] Autrement dit, les vérités mathématiques produites seraient directement positives, éternelles et immuables. Comme le rappelait récemment Salanskis, en se référant à la fameuse thèse poppérienne, il n'y a en effet pas dans les mathématiques d'événement de type *réfutation*.[5] Dès lors, envisager une épistémologie historique – dans un sens large – des mathématiques, au-delà de la simple chronologie, implique au moins deux options. Ou bien l'on doit proposer d'autres opérateurs historiques que la réfutation – mais lesquels ? – qui fonctionneraient pour cette science; ou bien l'on doit montrer qu'il y a à l'œuvre dans les mathématiques, une telle réfutation – ou du moins un certain type de "négation" –, qui permettrait de penser une certaine historicité, mais au prix d'une réévaluation de la vérité mathématique. C'est alors la question de la 'dialectique' qui se pose de façon très problématique étant donné que les auteurs emploient souvent ce terme sans préciser explicitement sa source et son contenu, ou bien en s'y référant de façon relativement libre.[6] Nous employons la notion d'opérateur historique pour rendre compte rationnellement d'un changement historique, sans préciser au préalable si la rationalité est causale, téléologique, dialectique, ontologique, axiologique, mais d'une façon suffisamment abstraite pour qu'un tel opérateur puisse être envisagé dans différentes situations de changements historiques. L'emploi de tels opérateurs est la marque de la recherche d'une compréhension rationnelle d'une telle histoire, au-delà d'une simple description chronologique.

Nous proposons de contribuer à l'hypothèse que l'épistémologie des mathématiques peut s'aborder de façon féconde selon une perspective historique. Pour cela, nous choisissons un objet qui a une certaine durée de vie dans l'histoire positive des mathématiques, et dont le contour est suffisamment précis pour pouvoir être abordé sans en rester à de pures généralités dans le cadre introductif d'un article. Il s'agit de certaines théories de Galois, choisies entre 1830 et les années 2000, dont on repère trois types. Il s'agit en un sens d'un objet du second ordre – ou d'un type secondaire – au sens où on parle de théorie de Galois d'un certain type d'objets ou de certaines théories, considérés comme étant du premier ordre – ou d'un type primaire.[7] On parle ainsi de la théorie de Galois des corps, de la théorie de Galois des revêtements ou de la théorie de Galois des K-algèbres... La théorie de Galois des objets X, d'un certain type préalablement identifié, organise et dégage des propriétés qu'on nommera galoisiennes, et qui d'une certaine manière met en jeu des groupes de symétries ou d'automorphismes et certains de leurs invariants associés. La théorie de Galois des objets X est en somme l'expression – variable suivant les moments historiques – d'une dualité entre des objets de type X' et X" – chacun reliés d'une certaine manière aux objets X –, le cas paradigmatique étant celui de la dualité symétries / invariants.[8] Nous n'entrerons pas ici dans

---

[4] Michel Foucault, *L'archéologie du savoir* (Paris: Gallimard, 1969), 246-247.

[5] Jean-Michel Salanskis, *Philosophie des mathématiques* (Paris: Vrin, 2008), 139.

[6] Voir par exemple les analyses proposées dans Jean-Jacques Wunenburger, "Figures de la dialectique," in *Bachelard et l'épistémologie française,* ed. Wunenburger Jean-Jacques (Paris: PUF, 2003).

[7] Nous employons ces termes de premier et second ordres dans un sens relativement différent de celui de la logique mathématique : la théorie des revêtements par exemple, en tant qu'elle comprend celle des espaces topologiques, est pour la logique une théorie du second ordre, mais en tant qu'elle décrit des objets usuels de la pratique – structurale – des mathématiques, nous la qualifions de théorie du premier ordre, ou de premier genre. Au fond, cette notion d'ordre est plus relative qu'absolu au sens où la théorie des revêtements pourrait elle-même être vue comme du second ordre relativement à la théorie d'un revêtement particulier à laquelle elle s'appliquerait.

[8] Ces termes issus du vocabulaire de la géométrie, mériteraient discussion. Le programme d'Erlangen de Klein en 1872 a été explicitement influencé par les idées de Galois. Mais en retour, il a évidemment

une analyse conceptuelle approfondie de cette dualité, préférant commencer par une présentation historique. Néanmoins, on admettra d'emblée que les dualités galoisiennes à l'œuvre dans chaque théorie de Galois sont du second ordre, au sens où elles s'appliquent à des objets posés et identifiés préalablement. Pour reprendre la perspective épistémologique kantienne, on pourrait dire que les dualités galoisiennes sont comme des concepts purs de l'entendement, ou catégories, que l'on applique à des objets, qui sont donnés par ailleurs, afin de mieux les connaître. En particulier, ces dualités pourraient relever de la catégorie de la relation. L'histoire qu'on propose sera donc une histoire conceptuelle, c'est-à-dire issue de la philosophie du concept, kantienne et hégélienne. Hegel est en effet celui qui met en mouvement – historique et dialectique – le concept kantien qu'il juge trop fixe et inerte. Et si Hegel n'a pas su, pas pu ou pas voulu traiter dignement les mathématiques de son temps,[9] les rabaissant au registre de la simple quantité, la tradition de l'épistémologie historique, en injectant une perspective dialectique dans l'abord des sciences, redonne selon nous toute la légitimité d'une philosophie du concept appliquée ou articulée aux mathématiques. Si Bachelard s'est certainement principalement orienté par les théories révolutionnaires de la physique de son époque – relativité d'Einstein et mécanique quantique –, deux de ses disciples français ont abordé directement les mathématiques de leur temps : Cavaillès et Lautman.

Cavaillès a proposé ce que nous appelons des opérateurs historiques pour penser l'évolution historique des mathématiques : le "paradigme" et la "thématisation", qui sont proposés dans la deuxième partie de *Sur la Logique et la théorie de la science*.[10] Le caractère hégélien de ces opérations ne va certes pas de soi, et les commentateurs se sont opposés à ce sujet. Or même si les puristes ont reproché à Cavaillès de ne pas avoir suffisamment défini sa notion de "concept", pourtant centrale chez Hegel, ou de ne pas avoir pris le risque d'engager son épistémologie explicitement sur la voie hégélienne, certes difficilement séparable de la métaphysique, l'inspiration hégélienne de l'épistémologie du concept de Cavaillès est indéniable, comme en témoigne notamment son appel à une dialectique à la fin de *Sur la logique et la théorie de la science*.[11]

Parallèlement Lautman dans son *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*,[12] a abordé différentes théories de Galois disponibles à son époque. Dans la théorie de Galois des corps, il a qualifié la progression vers des corps de plus en plus gros, pour discerner les racines d'un polynôme, de "montée vers l'absolu", en se référant à la dialectique cartésienne du *Discours de la méthode* de l'être parfait et de l'être imparfait – dans le registre de la connaissance. Or l'expression "montée vers l'absolu", au-delà de Descartes, résonne évidemment avec l'idéalisme allemand dont un des enjeux est de penser l'absolu, en particulier celui de Hegel. Mais Lautman ne se réfère jamais explicitement à Hegel. Sa référence dialectique est plutôt celle de Platon. Dans la philosophie de Lautman, les théories

irrigué et façonné une grande part des mathématiques du XXème siècle et notamment les théories de Galois.

[9] À ce sujet, Mélès a proposé l'idée selon laquelle les mathématiques du temps de Hegel étaient sans doute encore relativement ,"quantitative" et ce n'est qu'après – justement à partir de l'intervention de Galois – qu'elles seraient devenue plus réflexive, plus conforme à une logique de l'essence et du concept. Voir Baptiste Mélès, *Cavaillès et les moments de la conscience*, conférence donnée à l'Université Paris Diderot, (28 mars 2012), http://baptiste.meles.free.fr/site/B.Meles-Cavailles_conscience.pdf

[10] Jean Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science* (Paris: Vrin, Bibliothèque des textes philosophiques, [1947] 2008).

[11] Voir Hourya Sinaceur, *Jean Cavaillès, Philosophie mathématique* (Paris: PUF, 1994), 118; Jean Hyppolite, *Logique et existence* (Paris: PUF, 1991), 64-65; Jean-Toussaint Desanti, *La philosophie silencieuse ou Critique des philosophies de la science* (Paris: Éditions du Seuil, 1975), 62-63, et Emmanuel Renault, "Dialectique", in *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences*, ed. Lecourt Dominique (Paris : PUF, 2006). Références citées dans Emmanuel Renault, *La naturalisation de la dialectique* (Paris: Vrin, 2002), 122-123.

[12] Albert Lautman, "Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques" in *Les mathématiques, les idées et le réel physique* (Paris : Vrin, [1938] 2006), 125-234.

mathématiques viennent expliciter et permettre de comprendre des idées problématiques dialectiques. Concernant les théories de Galois, il s'agirait de la celle qui est liée à la dialectique parfait / imparfait, dans le registre de la connaissance. Notre choix des théories de Galois, comme objet d'étude est ainsi également motivé par le fait que celles-ci – au moins les premières d'entre elles – ont donné lieu à des commentaires et interprétations philosophiques en rapport avec des problèmes de la philosophie de la connaissance en générale et en particulier mathématique. Plusieurs auteurs les ont en effet mises en rapport avec des notions épistémologiques telles que l'ambiguïté, l'indiscernabilité ou l'indétermination.[13] Dans le cadre de cet article, nous ne discuterons pas ces notions et nous limiterons à employer de façon générique le terme "d'ambiguïté". De même que dans le champ de la philosophie analytique la logique mathématique est non seulement un objet d'étude, mais également une référence philosophique, quant à la méthodologie de l'expression, nous aspirons à un rapport similaire dans le contexte d'une épistémologie historique des mathématiques. Les théories de Galois peuvent être un objet d'étude intéressant pour une épistémologie historique des mathématiques, en même temps qu'elles disent – ou qu'on peut leur faire dire – quelque chose de l'épistémologie.

Nous aborderons les enchaînements de trois types de théories de Galois, que nous nommons respectivement 1) heuristiques, 2) structurales et 3) catégoriques.

Théories heuristiques de Galois.

Dans le commencement des années 1830, le jeune mathématicien français Évariste Galois révolutionna les mathématiques de son temps, en permettant d'obtenir la solution globale au problème de la résolubilité systématique par radicaux des équations polynomiales de degré n quelconque. Avant Galois, on avait prouvé des réponses positives pour des degrés n petits, qui pouvaient favoriser un certain optimisme scientifique. Mais en 1824, Abel démontra l'inexistence de telles formules pour $n = 5$ et quelques années plus tard, Galois généralisa ce résultat négatif pour tout $n \geq 5$. De même que le premier théorème d'incomplétude de Gödel, un siècle plus tard, est venu mettre à mal l'optimiste programme formaliste de Hilbert, le résultat négatif de Galois a entravé l'espoir d'un langage ou d'un calcul mathématique omnipotent.

Galois a ainsi opéré une réelle *rupture épistémologique*, aussi bien idéologique que technique. Sur le plan idéologique, il s'est inscrit contre le pessimisme de Lagrange et Comte sur la question de pouvoir résoudre ce problème. D'un point de vue généalogique - nietzschéen - on peut légitimement supposer qu'un tel pessimisme résulte d'une espérance première - ensuite déçue - d'aboutir à une telle résolution. Subjectivement, on peut dire que Galois se révolte contre cette double tendance, prenant ainsi des allures héroïques. Non

---

[13] Voir par exemple Évariste Galois, "Lettre d'Évariste Galois à Auguste Chevalier" [1832], *Les œuvres mathématiques, Journal de Liouville*, Tome XI (1846) (408 – 416), 415; Gustave Verriest, Évariste Galois et la théorie des équations algébriques, *La Revue des Questions scientifiques*, Mai et Juillet (1934): 346-376 (320-376) ; Jules Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre* (Paris: PUF, 1962), 223-300; Daniel Bennequin, "Questions de physique galoisienne, " in *Passion des Formes, à René Thom*, ed. Porte Michèle (Fontenay - Saint-Cloud : Éditions Fontenay - Saint Cloud, 1994), 350-356 (311-410); Yves André*, Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM* (2009), http://www.entretemps.asso.fr/maths/Livre.pdf, 43-54, Gabriel Catren and Julien Page, "On the notions of indiscernibility and indeterminacy in the light of the Galois-Grothendieck theory," *Synthese*, [Vol.] 191, 18, (2014): 4377 - 4408, et - Julien Page and Gabriel Catren, "Towards a Galoisian Interpretation of Heisenberg Indeterminacy Principle," *Foundations of Physics*, [Vol.] 44, 12, (2014): 1289 -1301.

seulement il n'accepte pas de croire à la possibilité d'aboutir positivement à une telle résolution, mais il parvient à obtenir mathématiquement l'impossibilité d'une telle résolution systématique pour des degrés supérieurs ou égaux à cinq. Pour cela il prend au sérieux l'instrument technique des permutations des racines d'une équation, déjà utilisé auparavant par Lagrange. Le pas décisif de Galois sur le plan technique, consiste à considérer ensemble de telles permutations, dans un tout muni d'une loi de composition - ce qu'on appelle aujourd'hui un groupe - pour l'étudier en tant que tel et développer ce qu'il nomme une « théorie de l'ambiguïté » relative au domaine de rationalité.

Prenons par exemple l'équation $P(x) = x^2 - 2 = 0$. Elle est écrite dans le corps - ou domaine de rationalité - des nombres rationnels Q[14]. Pourtant, ses deux racines $a = \sqrt{2}$ et $\beta = -\sqrt{2}$, ne sont pas dans Q et de plus, du point de vue de Q, on ne peut pas les distinguer. Autrement dit, la définition du x tel que $P(x) = 0$ est ambigüe. Galois mesure cette ambiguïté par ce qu'on appelle maintenant le groupe de Galois du polynôme $P(x) = x^2-2$, relativement au corps Q.[15] Ce groupe[16] contient exactement deux permutations des racines a et β : la permutation triviale *Id*, qui laisse les racines fixes et la permutation qui échange a et β. Si l'on passe à un domaine de rationalité plus gros et épistémiquement plus performant, par exemple Q(a), le plus petit corps qui contient Q, a et β, on annule l'ambiguïté entre a et β. En effet, si l'on considère le polynôme $R(x) = x - \sqrt{2}$, à coefficients dans Q(a), on peut discerner logiquement a et β car $R(a) = 0$ alors que $R(\beta) \neq 0$. Le nouveau groupe de Galois du même polynôme $P(x) = x^2 - 2$ relativement au nouveau corps Q(a), est devenu trivial : il ne contient que l'identité *Id*, qui ne permute rien. Le groupe de Galois G d'un polynôme P relativement à un domaine de rationalité K mesure l'ambiguïté entre les racines de P, du point de vue de K ou encore l'impuissance épistémique de K à discerner les différentes racines de P. Si G est suffisamment simple - soit en termes techniques *résoluble* -, on montre qu'alors l'équation $P(x) = 0$ est résoluble par radicaux. C'est en particulier toujours le cas si le degré de P est inférieur ou égal à quatre. Par contre, pour n supérieur ou égal à cinq, on peut toujours trouver un polynôme P dont le groupe de Galois G n'est pas résoluble - il est trop compliqué - et dans ce cas, l'équation $P(x) = 0$ ne sera pas résoluble par radicaux.

Une vingtaine d'années plus tard, en analyse cette fois, les mathématiciens s'interrogent aussi sur la résolubilité d'équations, non plus algébriques, mais fonctionnelles. Une fonction est la procédure objectivée qui à tout nombre a associe un - unique – nombre noté $f(a)$. L'étude des fonctions permet de traiter plusieurs cas particuliers de façon universelle et synthétique. En effet revenons à une équation polynômiale du type $x^2 - a = 0$. Nous avons déjà parlé du cas où $a = 2$, mais on peut envisager d'autres valeurs de a, qui donneront d'autres racines. Pour traiter synthétiquement de tous les cas, on peut considérer la fonction f qui à chaque valeur de a associe une racine $x = f(a)$. Dans notre exemple, une telle fonction doit vérifier l'équation fonctionnelle E d'inconnue f : $\forall a, f(a)^2 = a$, soit plus formellement $f^2 = Id$. Autrement dit par l'équation E, on voudrait définir une fonction racine carrée $f = \sqrt{}$. Or une telle définition pose plusieurs problèmes. D'abord, si l'on veut pouvoir traiter des cas où a est un nombre négatif, il faut pouvoir parler de racine carrée de nombres négatifs, et il est donc nécessaire de

[14] Un corps est un ensemble de "nombres" *a priori* abstraits, muni d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication et d'une division, satisfaisant à certains axiomes naturels. Par exemple, on a Q le corps des nombres rationnels, R le corps des nombres réels et C le corps des nombres complexes.

[15] La dualité galoisienne, qui n'est pas formulée explicitement par Galois, peut être identifiée rétrospectivement, en s'inspirant des théories de Galois algébriques postérieures, comme celle entre des polynômes et leur groupe de Galois respectif.

[16] En algèbre, un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition et d'un élément neutre, vérifiant certains axiomes. Par exemple, (Z,+), (Q,+), (R,+) et (R*,x) sont des groupes. Historiquement on attribue souvent la paternité de cette notion à Galois. Il s'agissait alors de groupes de permutations des racines de polynômes.

travailler avec les nombres complexes.[17] Par ailleurs l'analyse complexe, en tant qu'elle réalise une synthèse fonctionnelle de divers cas particuliers algébriques, hérite automatiquement du problème d'ambiguïté des équations algébriques. De même que le nombre 2 a potentiellement deux racines carrées données par l'équation $x^2 - 2 = 0$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, il y a potentiellement deux manières de définir la fonction racine carrée. Seul le cas où $a = 0$ est spécial car l'équation $x^2 - 0 = 0$ admet une seule et unique solution sans ambiguïté, c'est $x = 0$. Or ce point singulier $a = 0$ joue un rôle crucial dans la théorie. En effet, en dehors de ce point, sur un disque ouvert qui ne contient pas zéro, on peut montrer que l'équation fonctionnelle E : $f(a)^2 = a$ admet exactement deux solutions continues. On parle des deux "déterminations" de la racine carrée complexe. On dit aussi par abus de langage que \"la fonction f est multiforme", et tout le problème est alors d'uniformiser f, c'est-à-dire de choisir une seule détermination de f et de pouvoir la définir sur un domaine aussi grand que possible. En revanche, si l'on se place dans un domaine complexe qui contient zéro, on a un phénomène étrange mais fondamental, que l'on appelle la "monodromie" et qui peut être décrit comme suit. Si l'on choisit une détermination $f_1$de la racine carrée sur un petit disque D_1, voisinage ouvert d'un point M ne contenant pas zéro et que l'on fait tourner M et D_1 en n étapes autour de zéro, la détermination f_1, au bout d'un tour, est devenue $f_2 = -f_1$soit l'autre détermination.[18] Par contre si l'on fait deux tours autour de l'origine, on retombera bien sur f_1. et ainsi de suite. Autrement dit, le fait de tourner autour de l'origine induit des permutations dans le choix des solutions locales de l'équation E. C'est ce qu'on appelle la monodromie. Ainsi il n'est pas possible de définir de façon uniforme une racine carrée complexe sur un domaine ouvert dans lequel on pourrait faire un tour complet de l'origine.

Le héros de l'analyse complexe est Riemann, qui eut l'idée géniale en 1850, d'agencer ensemble - de recoller - des copies des petits disques ouverts $D_1, D_2, \dots D_n$, - les différentes étapes de la rotation de D_1 - dans une surface non plus globalement plane, mais qui s'enroule sur elle-même au-dessus du plan complexe, de telle sorte qu'au-dessus de tout point M non nul du plan complexe, on trouve sur cette surface exactement deux points M_1 et M_2, l'un au-dessus de l'autre, tous les deux exactement au-dessus de M. Chacun de ces deux étages correspondant à une détermination de la racine carrée. Cette surface de Riemann a une forme d'escalier en colimaçon. Ainsi, si l'on fait en bas dans le plan complexe, un tour complet autour de 0 en partant de M, le chemin correspondant en haut, part de M_1 et va jusqu'à M_2en suivant l'escalier en colimaçon. On a simplement changé d'étage. La définition d'une bonne fonction racine carrée uniforme, qui n'était pas possible sur tout le plan complexe, le devient à condition de prendre sa variable sur cette surface de Riemann.

Cette théorie des surfaces de Riemann n'est habituellement pas considérée comme une théorie de Galois, ou du moins elle n'est pas nommée telle. Elle constitue néanmoins certainement, l'origine historique d'une deuxième théorie de Galois, celle des revêtements topologiques,[19] qui peut être vue comme une théorie galoisienne générale de la monodromie. Son intérêt est aussi de permettre une articulation entre la théorie de Galois originelle des équations algébriques et la théorie de Galois des revêtements topologiques. Nous avons essayé

---

17 Si les nombres réels peuvent être représentés sur une droite, les nombres complexes, qui en sont une extension, peuvent être représentés sur un plan. Ils ont été inventés pour pouvoir considérer des racines carrées de nombres négatifs. Ainsi par exemple, $i = \sqrt{-1}$est un nombre complexe.

18 Faire tourner D_1, signifie que D_2 est obtenu par une rotation de D_1 autour de zéro de telle sorte que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Ainsi, le choix de la détermination de f sur D_2 est imposé car sur $D_1 \cap D_2$, il doit correspondre à la restriction de f à $D_1 \cap D_2$.

19 Pour cette évolution historique de Riemann à Poincaré, voir Jeremy John Gray, *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré* (Boston: Birkäuser, 2000). Pour une analyse conceptuelle, on peut consulter aussi Pierre Cartier, *Théories de Galois géométriques* (Bures-sur-Yvette: IHES, 2008).

ici de passer "conceptuellement" de la théorie originelle de Galois à la théorie de la monodromie sur les surfaces de Riemann grâce à l'opérateur historique de "synthèse fonctionnelle", qu'il convient de distinguer de la généralisation - par abstraction ou induction. Dans le vocabulaire de Cavaillès, la généralisation porterait le nom de "paradigme", alors que la synthèse fonctionnelle serait nommée "thématisation". Nous y reviendrons. Il ne s'agit ici en effet pas tant d'assouplir les conditions sur les variables du problème pour en admettre d'autres et gagner en généralité, que de mettre ensemble dans un même objet - la fonction - tous les cas opératoires particuliers. La cohésion de cette synthèse étant assurée par des conditions de continuité ou de dérivabilité. Il y a une migration du domaine discret de l'algèbre vers le domaine continu de l'analyse. Mais au-delà de cette hétérogénéité, on a montré le partage du problème de l'ambiguïté face à une équation et aussi la présence commune d'un groupe de permutations des solutions ambigües. Nous avons choisi de nommer les travaux originels de Galois et la "protothéorie" de l'ambiguïté-monodromie sur les surfaces de Riemann, des théories de Galois "heuristiques". Elles proposent en effet des solutions à des problèmes d'équations relativement concrets. Mais les outils qu'elles mettent en œuvre sont tellement nouveaux qu'ils ne sont pas encore assez déployés pour constituer une théorie formelle de l'ambiguïté suffisamment bien structurée. Il faudra pour cela attendre près d'un siècle.

Théories structurales de Galois : la catharsis des hypothèses.

Galois et ses contemporains travaillaient essentiellement à partir des nombres rationnels - ou des corps finis - sans que soit encore dégagée explicitement la notion de corps quelconque. En 1938, Artin propose la version de la théorie de Galois algébrique qui en est aujourd'hui encore la présentation classique, celle enseignée à l'université.[20] Elle se formule en termes d'extensions galoisiennes – c'est-à-dire satisfaisants certaines conditions techniques - de corps quelconques (par exemple $Q \rightarrow Q(\sqrt{2})$ dans notre exemple précédent) plutôt qu'en termes d'équations polynômiales. Ainsi on se donne sous certaines conditions, une extension (galoisienne) de corps $K \rightarrow L$, et l'on s'intéresse à tous les corps intermédiaires F (*i.e.* : $K \rightarrow F \rightarrow L$). Le corps F est pensé comme le corps de base variable à partir duquel on envisage la situation d'ambiguïté L. Plus F est grand, plus il a de ressources - épistémiques - pour briser l'ambiguïté et inversement, plus F est petit, moins il peut discerner les éléments ambigus et plus l'ambiguïté est grande. L'ambiguïté relative de L par rapport à F est désormais pensée en termes de localisation des points de L par des coordonnées. Elle est mesurée par le groupe de Galois $Gal(L/F)$ de l'extension $L/F = F \rightarrow L$, qui est maintenant défini comme le groupe des automorphismes - ou symétries - du corps L qui laissent fixes tous les éléments de F. En effet la théorie montre que L est un F-espace vectoriel de dimension m. On a donc un isomorphisme de F-espaces vectoriels entre L et F^m. Or pour tout m-uple de nombres dans F, $(\alpha_1;\alpha_2; \ldots\alpha_m)$, la définition du point x de L de coordonnées $(\alpha_1;\alpha_2; \ldots\alpha_m)$, est ambigüe car on n'a pas spécifié la base de L dans laquelle s'expriment ces coordonnées - on n'a pas spécifié l'isomorphisme entre L et F^m.[21] L'ambiguïté est donc une notion relative. L'ambiguïté maximale de la situation correspond au cas où F est le plus petit possible : $F = K$. Elle est mesurée par le groupe $G = Gal(L/K)$. L'ambiguïté minimale est mesurée par $Gal(L/L) = \{Id_L\}$, le groupe à un seul élément : l'identité de L, qui fixe tous les éléments de L. L'ambiguïté relativement à un corps intermédiaire F situé entre K et L est alors mesurée par le groupe $H = Gal(L/F)$ qui se révèle être un groupe intermédiaire entre $\{Id_L\}$ et G. D'ailleurs, le cardinal de ce groupe $H = Gal(L/F)$ est exactement la dimension m de L en tant que F-espace vectoriel. Le résultat principal de la théorie s'énonce alors comme une correspondance bijective parfaite entre l'ensemble ordonné des corps intermédiaires F entre K et L et l'ensemble ordonné des

[20] Voir par exemple Emil Artin, *Galois Theory* (New-York: Dover Publiations, 1942).

[21] $B = \{l_1;l_2; \ldots l_m\}$ est une F-base de L alors le point $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i$ a pour coordonnées $(\alpha_1;\alpha_2; \ldots\alpha_m)$ dans B. Mais pour tout automorphisme $s \in Gal(L/F)$, le point $x' = s(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s(l_i)$a également pour coordonnées $(\alpha_1;\alpha_2; \ldots\alpha_m)$ dans la nouvelle base $B' = \{s(l_1); s(l_2); \ldots s(l_m)\}$.

groupes intermédiaires *H* entre $\{Id_L\}$ et *G*. Cette correspondance associe à tout *F*, le groupe *H* = *Gal*(*L*/*F*). Réciproquement, à un sous-groupe *H* de *G*, elle associe un corps *F*, intermédiaire entre *K* et *L* ; *F* est constitué par l'ensemble des points de *L* qui sont laissés fixes par tous les éléments de *H*. C'est la correspondance de Galois entre les sous-groupes *H* de *G* de symétries de *L* et les *F,* sous-corps de L, laissé invariant point par point. On a donc bien ici une dualité symétries / invariants.

Nous allons maintenant présenter la théorie de Galois des revêtements topologiques.[22] Formellement, elle ressemble beaucoup à la théorie algébrique de Artin. Le résultat principal en est aussi une correspondance parfaite entre des objets intermédiaires *F* et leur groupe d'ambiguïté associé *H*. Les objets *F* considérés ne sont plus des structures algébriques - des corps - mais des espaces topologiques généraux et abstraits, qui généralisent les surfaces de Riemann. Comme dans la théorie algébrique, on ne parle plus que des objets topologiques *F* et non plus des équations éventuelles qui les engendreraient. La notion de revêtement dans la théorie topologique correspond à celle d'extension de corps dans la théorie algébrique. À l'époque des surfaces de Riemann au XIXème siècle, on parlait de "recouvrement". Mais aujourd'hui on dit qu'un espace topologique *L* - sous-entendu "gros" - est un revêtement d'un espace topologique *K* - sous-entendu "petit" - si l'on peut représenter *L* au-dessus de *K* au moyen d'une projection $p : L \rightarrow K$ vérifiant un certain nombre de bonnes propriétés. L'idée étant, qu'étant donné un point *M* de l'espace de base *K*, il y a plusieurs points $M_1, M_2, \dots M_n$ qui sont situés exactement au-dessus de *M* et qui s'envoient, par la projection *p*, exactement sur ce même point *M*. L'ensemble de ces points $\{M_1, M_2, \dots M_n\}$ image réciproque de *M* par la projection *p*, constitue ce qu'on appelle la "fibre" du revêtement au-dessus de *M*. C'est ici qu'intervient la notion d'ambiguïté. Si l'on veut définir "le " point de *L* qui est exactement au-dessus du point *M* de *K*, on voit qu'il y a une ambiguïté, car plusieurs points conviennent. On est dans une situation analogue à celle d'une équation polynômiale qui admettrait plusieurs racines. L'ambiguïté du revêtement galoisien[23] $L/K = L \rightarrow K$ est encore mesuré par un groupe : le groupe *Gal*(*L*/*K*) des homéomorphismes - bijections bicontinues - de l'espace *L* compatibles avec la projection *p*, c'est-à-dire qui laissent chaque fibre globalement invariante.[24] Maintenant à la place de *K*, on considère un espace topologique intermédiaire *F* variable entre *K* et *L*, au sens où la projection *p* de *L* sur *K* peut être décomposée comme passant par $F : L \rightarrow F \rightarrow K$. *L* étant un revêtement de *F*, on peut lui associer comme précédemment le groupe d'ambiguïté *H* = *Gal*(*L*/*F*). Ici encore, *H* sera toujours un groupe intermédiaire entre les deux situations d'ambiguïté extrêmales. Autrement dit *H* sera un groupe intermédiaire entre *Gal*(L/L) = $\{Id_L\}$ et *G* = *Gal*(L/K).

Nous proposons d'appeler ces deux théories de Galois, des théories structurales car elles mettent en scène explicitement des structures - algébriques et topologiques - au sens de Bourbaki, c'est-à-dire "des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...]; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée".[25]

---

22 Voir par exemple Tamas Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups* (Cambridge: Cambridge University Presa, 2009) – (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117).

23 Pour développer la théorie on a besoin d'hypothèses sur le revêtement : il doit être galoisien, c'est-à-dire connexe par arcs et tel que le groupe des automorphismes agit transitivement sur chaque fibre.

24 Ce groupe est lié au groupe fondamental de Poincaré de l'espace *K*, qui est le groupe des lacets que l'on peut dessiner dans *K* et qui généralise les tours que l'on pouvait faire autour de l'origine dans le cas de la surface de Riemann associée à la racine carrée complexe.

25 Nicolas Bourbaki, "L'Architecture des mathématiques," in *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. Le Lionnais F. (Paris: Hermann, [1948] 1997), 40-41.

Il y a alors deux mouvements historiques à considérer. D'une part celui que nous qualifierons d'horizontal et qui va du cas algébrique au cas topologique. Et d'autre part celui que nous qualifierons de vertical et qui va des théories heuristiques aux théories structurales. À propos du mouvement horizontal, nous avons déjà évoqué la notion de synthèse fonctionnelle au niveau des théories de Galois heuristiques. Pour le niveau plus formel des théories structurales, nous ne disposons pas, à ce niveau, d'un tel opérateur d'universalisation concrète, qui proposerait un objet topologique susceptible de représenter plusieurs cas algébriques.[26] En revanche nous avons pu noter une analogie formelle extrêmement forte entre les situations algébrique et topologique. Elles présentent des schémas structuraux - ceux des correspondances - très similaires. On peut alors illustrer le passage historique de la théorie structurale algébrique à la théorie structurale topologique comme un "transit" de l'idée d'ambiguïté. Cela suppose une révision de la notion d'objet qui donnerait le primat aux relations qu'il entretient avec les autres objets, plutôt qu'à sa nature interne constitutive. Nous proposons pour cela de nous référer à "l'ontologie transitoire" que propose le philosophe contemporain des mathématiques Zalamea, inspiré par les travaux du mathématicien Grothendieck; celui qui a justement pris au sérieux cette analogie formelle au point de formuler une théorie catégorique abstraite de Galois, comme on le verra dans notre troisième partie. "Dans la manière de faire de Grothendieck, en particulier, on peut observer d'abord, l'introduction d'un réseau d'incessants transferts, transcriptions, translations de concepts et d'objets entre des régions des mathématiques apparemment distantes, et deuxièmement, une recherche également incessante d'invariants, de proto-concepts et de proto-objets derrière le réseau des mouvements".[27] Selon Zalamea, un objet mathématique contemporain L n'a pas de statut fixe et unique. Il doit être envisagé dans différents contextes – par exemple pour nous, algébrique et topologique - et relativement à différents autres objets F - bases ou référentiels. Cette transférabilité horizontale des objets constituerait une sorte de théorie de la relativité de l'objet, consécutive d'un "tournant einsteinien"[28] des mathématiques contemporaines initié au milieu du XXème siècle par Grothendieck.

Ce transit relativiste horizontal contemporain - autour des années 1940-1950 - des théories structurales, doit être distingué du mouvement vertical ascendant qui relie le XIXème au XXème siècle et qui a de nombreuses caractéristiques de la catharsis bachelardienne. Ce deuxième mouvement vertical est beaucoup plus massif et fondamental en tant qu'il renferme toutes les étapes de la constitution progressive des concepts des structures algébriques modernes - groupe, anneau, corps, espace vectoriel - et d'espace topologique. Les travaux de Galois et de Riemann-Poincaré se révèlent *a posteriori* comme pouvant être intégrés comme des cas particuliers des théories de Galois structurales du XXème siècle, tout comme la théorie newtonienne de la gravitation se révèle être un cas particulier de la théorie relativiste - à condition de prendre un espace-temps plat et des vitesses négligeables devant la vitesse de la lumière. Ce mouvement ascendant en généralité et en abstraction peut être qualifié d'induction bachelardienne au sens de *La valeur inductive de la relativité*.[29] La mathématisation abstraite y joue le rôle d'un opérateur de progrès historique des autres sciences. Or il n'y a pas de sens à vouloir appliquer un tel opérateur aux mathématiques elles-mêmes qui sont évidemment déjà sous forme mathématisée. C'était l'un des problèmes d'une historicité de cette discipline, qu'on a évoqué en introduction à partir de la citation de Foucault. Cette question est en réalité résoluble si l'on ne considère pas l'opérateur de mathématisation, mais celui d'abstraction-généralisation, qui peut bien alors s'appliquer à des théories mathématiques particulières pour en donner d'autres, comme on l'a vu à propos des théories de Galois heuristiques. Il faut pour

[26] Au niveau catégorique, la notion de spectre étale, pourrait jouer un tel rôle, mais nous ne l'aborderons pas ici.
[27] Fernando Zalamea, *Synthetic philosophy of Contemporary Mathematics*, trad., ed. Z. L. Frazer (New-York: Urbanomic/Windsor Quarry and Sequence Press, 2012), 140-141.
[28] Fernando Zalamea, *Synthetic philosophy of Contemporary Mathematics*, 270.
[29] Gaston Bachelard, *La valeur inductive de la relativité* (Paris: Vrin, 1929).

cela quitter les domaines privilégiés de l'épistémologie historique - à savoir pour Bachelard les sciences physiques et chimiques, puis pour ses successeurs, les sciences biologiques et humaines - et rentrer dans la philosophie des mathématiques proprement dite.

Bachelard lui-même a proposé quelques études locales des mathématiques dont la plus célèbre est sans doute celle des géométries non-euclidiennes dans *Le nouvel esprit scientifique*.[30] Il est essentiel de bien comprendre le sens et la valeur de ce "non", qui se répète dans les formules de Bachelard, au point qu'il écrive en 1940 une *Philosophie du non*.[31] Dans l'introduction du *Nouvel esprit scientifique*, il évoquait aussi "la mesure non-archimédienne, la mécanique non-newtonienne avec Einstein, la physique non-maxwellienne avec Bohr".[32] Nous pouvons alors très bien appliquer ce non bachelardien aux théories de Galois heuristiques pour rendre raison de l'avènement des théories structurales. Les corps abstraits de Artin pourraient alors être qualifiés de non-galoisien et les revêtements quelconques de non riemanniens au sens où les seconds généralisent les premiers.

Cette dynamique du "non" est-elle dialectique au sens de Hegel ? Bien qu'influencé par l'idée hégélienne d'une rationalité en mouvement, et malgré son usage répété du terme "dialectique", Bachelard se distingue de Hegel en refusant le caractère trop systématique et clos de sa logique. Par ailleurs, la négation bachelardienne, bien qu'elle donne un rôle clé à la polémique[33], respecte le principe logique de non-contradiction, en tant qu'elle procède de l'extérieur par extension : la géométrie non-euclidienne n'est pas pour Bachelard déductible de la géométrie euclidienne, elle vient la compléter. Au contraire chez Hegel, la négation est immanente. Chaque détermination de l'Idée hégélienne creuse en elle-même l'espace de sa propre contradiction, pour ensuite se relever dans une détermination supérieure. Il faut encore distinguer le non bachelardien de l'antithétique des couples dialectiques de notions philosophiques contraires proposée par Lautman comme par exemple avec les couples continu/discontinu et local/global. Selon Lautman, les mathématiques se développeraient en théories successives dans la perspective de bien formuler et résoudre des problèmes de nature philosophiques, liés à ces couples de contraires. Outre le cadre platonicien auquel Bachelard lui, refuse de se soumettre, il faut indiquer que l'épistémologie de Lautman n'est pas tant historique que générative. Son antithétique concerne les Idées problématiques qui induisent les théories mathématiques, mais non pas ces théories elles-mêmes, de sorte qu'elle rend davantage compte de la naissance des théories mathématiques, considérées chacune relativement à l'Idée-problème, que de leur succession.

En revanche, la référence à Cavaillès semble plus proche de l'induction bachelardienne, *via* son opérateur de séparation par *paradigme*. Cavaillès repère en effet dans l'histoire des mathématiques deux processus ou "gestes": celui de "paradigme" et celui de "thématisation".[34] Le premier, qui est à l'œuvre ici, consiste en une généralisation sur les objets. Ainsi, avec la théorie de Galois algébrique de Artin, on passe de quelques corps particuliers à n'importe quel corps, comme si l'on faisait de certaines constantes, des variables. Le second geste mathématique, la thématisation est une généralisation qui porte sur les actes. Elle consiste à prendre les actes, les transformations, les transferts, pour des objets d'étude en tant que tels. Elle est aussi à l'œuvre dans la genèse des théories de Galois en tant que le statut des permutations des solutions d'une équation - polynômiale ou fonctionnelle - évoluent. D'abord

[30] Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique* (Paris: PUF, [1934] 1968).
[31] Gaston Bachelard, *La philosophie du non: essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique* (Paris: PUF, 1940).
[32] Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, 7.
[33] Ainsi ecrit-il : "Comme le dit Nietzsche: tout ce qui est décisif ne naît que malgré" - Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, 6-7. Et encore "Toute connaissance, au moment de sa constitution est une connaissance polémique; elle doit d'abord détruire pour faire place à ses constructions" – Gaston Bachelard, *La dialectique de la durée* (Paris : Boivin, 1936), 14, cité par Dominique Lecourt dans Dominique Lecourt, *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard* (Paris : Vrin, 2002), 85.
[34] Voir par exemple Jean Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, 27-30.

envisagées comme simple outil de résolution ou isolément, sans réel souci du tout algébrique qu'elles constituent, elles sont peu à peu abordées dans une structure - celle de groupe - qui les totalise et exprime la loi de leurs compositions.[35] Les groupes de permutations des solutions ou ensuite les groupes des automorphismes des structures algébriques ou topologiques, ont alors joué un rôle crucial pour formuler ces théories de l'ambiguïté relative.

Théories catégoriques de Galois : la catharsis des méthodes.

Les mathématiques du XXème siècle ont connu un bouleversement épistémologique certainement aussi important que l'avènement de la théorie des ensembles au début de ce siècle, mais malheureusement encore trop peu étudié par l'épistémologie relativement à la logique. Il s'agit de la théorie des catégories. Alors qu'un ensemble est une collection d'éléments qui sont eux-mêmes des ensembles, une catégorie est la donnée d'une collection d'objets, et d'une collection de flèches entre ces objets. Souvent en pratique, les objets d'une catégorie sont des structures mathématiques comme par exemple des groupes ou des espaces topologiques et les flèches sont des morphismes entre elles. La notion de flèches - ou morphismes - est centrale dans la théorie des catégories. Alors que la théorie des ensembles décrit les objets par leur constitution interne, la théorie des catégories les décrits plutôt par les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets.[36] La collection de toutes les catégories constitue elle-même une catégorie si l'on considère comme flèches les foncteurs.[37] Un foncteur d'une catégorie C vers une catégorie D est une procédure qui à tout objet de C associe un objet de D, et à toute flèche de C associe une flèche de D en respectant la compatibilité des sources et buts. Cette théorie est particulièrement adaptée pour penser les transferts ou traductions d'un domaine des mathématiques à un autre. Elle a inspiré au philosophe Zalamea sa notion "d'ontologie transitoire".[38] On peut dire qu'elle prend au sérieux cette notion de transfert si importante dans la pratique mathématique contemporaine et la thématise comme telle. Comme le signale le philosophe Mélès, la théorie des catégories constitue à la fois une illustration et une formalisation des concepts dynamiques de paradigme et de thématisation de Cavaillès.[39] Les "flèches" des catégories sont un parfait exemple de thématisation, d'autant que de nombreuses catégories ont pour objets des flèches d'une autre catégorie, comme ce sera le cas dans la théorie de Galois catégorique proposée par Janelidze à la fin des années 1980.

Ainsi avec ce formalisme, les deux correspondances de Galois qu'on a évoquées peuvent être reformulées comme des foncteurs bijectifs entre catégories. Dans la théorie algébrique, le foncteur bijectif part de la catégorie des corps intermédiaires, entre deux corps donnés K et L – formant une extension galoisienne -, avec pour flèches, les inclusions - inversées - d'un corps dans un autre. Ce foncteur arrive dans la catégorie des groupes intermédiaires situés entre $G = Gal(L/K)$ et $\{Id_L\}$, dont les flèches sont les inclusions entre groupes. Dans la théorie de Galois des revêtements topologiques, il faut remplacer les corps par des espaces topologiques. Les flèches sont alors les projections d'un espace sur un autre. Or on voit maintenant que l'on pourrait envisager comme catégorie initiale une tout autre

---

[35] Si l'on effectue d'abord une permutation *r* puis une seconde *s*, tout se passe comme si l'on avait effectué une seule permutation *t* qui est définie comme la composée de *r* et *s*, de la même manière que l'addition de deux nombres donne encore un nombre. Et aussi, l'inverse d'une permutation est encore une permutation.

[36] On pourrait dire d'après la terminologie bachelardienne de Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique* (Paris: Vrin, 1938) que la théorie des catégories surmonte en un sens, "l'obstacle substantialiste" de la théorie des ensembles.

[37] Comme pour les ensembles d'ensembles, il faut prendre des précautions dans ce genre de constructions; des précautions en termes de cardinalité.

[38] Il s'inspire également de Merleau-Ponty et Badiou.

[39] Baptiste Mélès, "Pratique mathématique et lecture de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere," *Philosophia Scienciae*, 16-1, (2012), 153-182.

catégorie, non nécessairement algébrique et non nécessairement topologique dont on voudrait évaluer l'ambiguïté relative dans une catégorie de groupes d'ambiguïté. C'est justement ce que fait Grothendieck qui s'est demandé en 1960-1961 quelles conditions devaient satisfaire une catégorie initiale *C*, pour pouvoir formuler une théorie de Galois à son sujet. Il a alors proposé "les conditions axiomatiques d'une théorie de Galois" qui feraient de la catégorie C une catégorie galoisienne.[40] Modulo quelques reformulations structurelles techniques, les catégories des corps et des espaces topologiques intermédiaires permettent de constituer naturellement des cas particuliers de catégories galoisiennes. On a ici un processus de paradigme - ou d'induction - du second ordre, qui unifie les théories de Galois structurales algébriques et topologiques en une seule, celle des catégories galoisiennes.

On remarque que si la catégorie galoisienne *C* peut varier, la seconde catégorie, le but du foncteur, celle où l'on mesure l'ambiguïté – ou de façon duale la discernabilité - de la première reste à peu près la même. Initialement, c'était toujours une catégorie de groupes. Grothendieck dans sa reformulation, la remplace par une catégorie qui sera toujours une catégorie de *G*-ensembles, c'est-à-dire d'ensembles munis d'une action d'un groupe *G*, le groupe de Galois associé à *C*. Une étape d'abstraction est encore franchie par Janelidze, qui propose une théorie de Galois catégorique encore plus générale où la catégorie des *G*-ensembles de Grothendieck est remplacée par une catégorie plus quelconque *D*.[41] Par ailleurs, il faut signaler que le théorème général de Janelidze internalise en son sein une sorte de thématisation. En effet les hypothèses en sont la donnée de deux catégories quelconques *C* et *D* reliées par deux foncteurs *F* et *F'*- adjoints - allant en sens inverse. Le foncteur *F* permet de représenter la catégorie *C* dans la catégorie *D* et inversement pour *F'*. Dans *C* on dispose aussi de deux objets *L* et *K* reliés par une flèche *p* qui va de *L* vers *K*. Par analogie avec les théories précédentes, mais de façon plus allusive, on dira que *K* constitue une situation d'ambiguïté ou d'indétermination maximale, alors que lorsqu'on remonte jusqu'à *L*, elle devient minimale. On propose en effet d'interpréter la catégorie *C* comme celles de situations épistémiques et la catégorie *D* comme celle des objets correspondants qu'elles sont capables de discerner. Or initialement en général, les représentations *F* et *F′* entre *C* et *D* ne sont pas suffisamment fidèles, c'est-à-dire en un sens, pas suffisamment bijectives. Il faut travailler sur ces catégories pour obtenir comme résultat du théorème, une "équivalence de catégories"[42] parfaite entre deux nouvelles catégories, *C′*et *D′*. Pour construire *C′*, on commence par une thématisation formelle : remplacer la catégorie *C* par la catégorie C/K des flèches de *C* qui pointent vers *K*.[43] De même la catégorie D' sera quelque chose comme une catégorie de flèches de *D* qui pointent vers *F*(*K*), munies d'une sorte d'action d'un "groupoïde" de Galois de la situation.[44] Ce théorème très général comprend comme cas particuliers le théorème catégorique de Grothendieck et les deux théories structurales des corps et des revêtements, mais aussi de nouveaux exemples assez inattendus.

---

[40] Voir Alexandre Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61. Revêtements étales et groupe fondamental, SGA1* (Berlin, New-York, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971), exposé V.

[41] Voir Francis Borceux and George Janelidze, *Galois theories*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2001), 116. Voir aussi Jean-Jacques Szczeciniarz, "The Mysterious Strength of the Galois Theory," in *In the Steps of Galois, Proceedings of the Evariste Galois Bicentenary Meeting,* ed. Bertato, F. M., Cifuentes J. C., Szczeciniarz, J.-J. (Paris: Hermann, 2014), 53-102.

[42] La notion d'équivalence de catégories entre deux catégories généralise la notion de correspondance bijective entre deux ensembles.

[43] Par exemple, si *C* est la catégorie des anneaux commutatifs et *K* un corps, la catégorie C/K peut être vue comme la catégorie des *K*-algèbres.

[44] En fait il s'agit d'un groupoïde interne. On a ici une double généralisation de la notion de groupe. D'une part en tant que la notion de groupïde généralise celle de groupe. D'autre part en tant qu'elle est internalisée.

Conclusion.

On a vu en quoi l'on pouvait proposer une historicité philosophique de certaines théories de Galois. Elle est conceptuelle en cela qu'on l'a formulée dans une logique du concept - non strictement hégélienne - conçue essentiellement *a posteriori* à partir des objets et résultats des théories et sans avoir exploré en profondeur les contextes psycho-sociologiques – ni même mathématiques -, qui les sous-tendent. Le but étant de repérer les grands opérateurs historiques à l'œuvre dans la conception de cette histoire, on a mis en évidence le paradigme et la thématisation de Cavaillès – selon plusieurs occurrences –, et aussi un transit de l'algèbre vers la topologie.

On peut alors légitimement poser la question de l'unité des théories de Galois, au-delà de la simple nomination. Qu'est-ce qui réunit les différentes théories de Galois qu'on a exposées à part leur nom. *A posteriori* l'unité apparaît évidemment dans la liaison par les opérateurs historiques, mais on peut aussi la qualifier *a priori* à partir de la théorie platonicienne des idées dialectiques problématiques formulée par Lautman au sujet des mathématiques. En prolongeant celle-ci, on pourrait dire que les théories de Galois sont des tentatives successives de formaliser et résoudre un même problème philosophique de la connaissance, celui de l'articulation conceptuelle entre le sujet et l'objet – c'est ce que nous interprétons à partir des dualités galoisiennes, correspondances ou équivalences de catégories – ; et aussi celui du couple dialectique parfait/imparfait - en ce qui concerne la discernabilité des objets par les sujets, soit celui de réduire l'ambiguïté ou du moins de mieux la comprendre, dans la perspective de ce que Lautman nomme une *montée vers l'absolu.*[45] En ce sens, la vérité mathématique ne doit pas être conçue comme une exactitude positive axiomatico-déductive, comme le suggérait la citation de Foucault, mais comme un progrès dialectique au regard du problème philosophique qui la guide.

[45] Albert Lautman, "Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques".