DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
(Diretor: **Prof. Dr. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho**)

AS FUNÇÕES BETA E GAMA E SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DE DISTRIBUIÇÕES DE CERTAS FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMALMENTE DISTRIBUIDAS

G. GARCIA DUARTE
Assistente

I — O presente trabalho pode ser dividido em duas partes: — na primeira procuraremos deduzir, de forma accessível, as propriedades das funções beta e gama que maior interêsse apresentam para a estatística, enquanto que na segunda nosso objetivo será, utilizando de alguns resultados obtidos, dar uma visão sintética das principais distribuições que se originam ao considerar-se particulares funções de variáveis aleatórias unidimensionais, normalmente distribuidas.

A importância do assunto é de tal monta que seria supérfluo insistirmos sôbre esta questão.

Da própria finalidade do nosso estudo depreende-se que iremos abordar as funções beta e gama tendo sempre presente o ponto de vista estatístico: assim, por exemplo, em consonância com as necessidades da aplicação, vamos definir as funções beta e gama em forma de integrais impróprias.

II — Legendre deu o nome de integrais eulerianas de primeira e segunda espécie às expressões:—

$$(1)\ B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \,.\, (1-x)^{q-1} \,.\, dx \qquad (2)\ \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \,.\, e^{-x} \,.\, dx$$

A (1) é usualmente denominada função beta e a (2) função gama.

III — Consideremos em primeiro lugar a função

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \,.\, e^{-x} \,.\, dx$$

Se $p>0$, a integral existe. Para demonstrá-lo, notemos preliminarmente que para qualquer valor de $p>0$ o integrando é limitado superiormente; de fato, para $x \to \infty$, $x^{p-1}.e^{-x} \to 0$, pois, e^{-x} é um infinitésimo de ordem infinita.

Consideremos agora os dois casos:—

$$p \geq 1 \quad e \quad 0<p<1$$

a) Se $p \geq 1$, $p - 1 \geq 0$, do que segue que para $x \longrightarrow 0$, $x^{p-1} \longrightarrow 0$, e, portanto, o integrando é limitado inferiormente, resultado que combinado à observação anterior basta para afirmar-se que a integral existe.

b) Se $0 < p < 1$, $p - 1 < 0$. Para $x \longrightarrow 0$, $x^{p-1} \longrightarrow \infty$, com uma ordem $1 - p < 1$, o que combinado com a observação preliminar permite novamente que se conclua que a integral existe.

IV — Propriedades:—

a) Da definição de $\Gamma(p)$ resulta:—

$$(3) \qquad \Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \,.\, e^{-x} \,.\, \log x \,.\, dx$$

$$(4) \qquad \Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \,.\, e^{-x} \,.\, (\log x)^2 \,.\, dx$$

E como a expressão $x^{p-1} . e^{-x} . (\log x)^2$ é sempre positiva

$$\Gamma''(p) > 0 \qquad\qquad (0 < p < \infty)$$

e portanto a curva representativa da função tem concavidade voltada para cima.

b) $$(5) \qquad \Gamma(p + 1) = p \times \Gamma(p)$$

De fato, por integração por partes pondo $u = e^{-x}$, $dv = x^{p-1}dx$, tem-se:—

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} . e^{-x} . dx = \frac{1}{p} . x^p e^{-x} \Big]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty x^p . e^{-x} . dx = \frac{1}{p}\, \Gamma(p+1)$$

Por aplicação repetida desta relação, vem, para n inteiro:—

$$(6) \qquad \Gamma(n + 1) = n!$$

c) Se em (2) fizermos $x = by$, teremos:—

$$(7) \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-by} (by)^{p-1} . b . dy = b^p \int_0^\infty e^{-by} . y^{p-1} . dy$$

d) Se em (2) fizermos $x = y^2$, teremos, notando que em $(0, \infty)$ a transformação é biunívoca

$$(8) \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-y^2} (y^2)^{p-1} . 2y . dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} . y^{2p-1} . dy$$

Para $p = 1/2$ vem:—

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} . dy$$

Notando que

$$\left[\Gamma(1/2)\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} . e^{-x^2} . dx . dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} v . e^{-v^2} . dv . d\theta = \pi$$

Então:—

$$(9) \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

e) Se em (2) fizermos $x = -(m+1)\log y$ $(-1 < m)$, tem-se, notando que devido à negatividade de $-(m+1)$, $y \longrightarrow 0$, para $x \longrightarrow \infty$ e após mudança dos limites integratórios:—

$$(10) \qquad \Gamma(p) = (m+1)^p(-1)^{p+1}\int_0^1 e^{(m+1)\log y} . (\log y)^{p-1} . \frac{1}{y} . dy$$

ou seja

$$\Gamma(p) = (m+1)^p \int_0^1 y^m . \log\left(\frac{1}{y}\right)^{p-1} . dy$$

e, em particular, para $m = 0$

$$(11) \qquad \Gamma(p) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{p-1} . dy$$

f) Como vimos pela (3)

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} . e^{-x} . \log x . dx$$

Mas, desde que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kt} - e^{-xt}}{t} dt = \int_0^\infty dt \int_k^\infty e^{-tu} . du = \int_k^x du \int_0^\infty e^{-tu} dt = \int_k^\infty \frac{du}{u} = \log\frac{x}{k}$$

e se fizermos $k = 1$, vem:—

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \, dt$$

e portanto por substituição:—

$$(13) \qquad \Gamma'(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} \, . \, e^{-x} \, . \, \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \, . \, dt \, . \, dx$$

Dêste resultado segue, tendo em vista a (7)

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} \, . \, e^{-x} \, . \, \frac{e^{-t}}{t} \, . \, dx \, . \, dt - \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} \, . \, e^{-x} \, . \, \frac{e^{-xt}}{t} \, . \, dx \, . \, dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{p-1} \, . \, e^{-x} \, . \, dx \right] \frac{e^{-t}}{t} \, . \, dt - \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{p-1} \, . \, e^{-x(1+t)} dz \right] \frac{1}{t} \, . \, dt =$$

$$= \Gamma(p) \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \, . \, dt - \int_0^\infty \frac{\Gamma(p)}{(1+t)^p} \, . \, \frac{1}{t} \, . \, dt$$

$$(14) \qquad \Gamma'(p) = \Gamma(p) \int_0^\infty \frac{1}{t} \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^p} \right] dt$$

ou seja

$$(\ 5) \quad D \log \Gamma(p) = \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \int_0^\infty \frac{1}{t} \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^p} \right] dt$$

que é conhecida por fórmula de Cauchy.

Em particular, se $p = 1$

$$(16) \qquad \Gamma'(1) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = - C$$

onde a constante C é denominada constante de Euler.

Se da (15) subtrairmos a (16)

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \Gamma'(1) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^p} \right] dt$$

ou operando a transformação $1 + t = 1/x$

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \Gamma'(1) = \int_0^\infty \frac{x}{x-1}\,(x - x^p)\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$(17) \qquad \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1 - x^{p-1}}{1 - x}\,.\,dx$$

que é conhecida por fórmula de Gauss.

Em particular, supondo $p = n$ inteiro e tendo presente que

$$\frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2}$$

tem-se então:—

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2})\, dx$$

$$(18) \qquad \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

g) Da relação (7) supondo $b < 1$, segue:—

$$\frac{\Gamma(p+b)}{(1+y)^{p+b}} = \int_0^\infty x^{p+b-1}\,.\,e^{-(1+y)x}\,.\,dx$$

$$\Gamma(p+b)\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{p+b}}\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{p+b-1}\,.\,e^{-x-yx}\,.\,dx\right) y^{b-1}\,.\,dy$$

$$\int_0^\infty x^{p+b-1}\,.\,e^{-x}\,.\,dx \int_0^\infty y^{b-1}\,.\,e^{-yx}\,.\,dx = \Gamma(p+b)\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy$$

ou pela (7)

$$\Gamma(b)\int_0^\infty \frac{x^{p+b-1}\,.\,e^{-x}}{x^b}\,.\,dx = \Gamma(p+b)\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{p+b}}\, dy$$

ou finalmente

$$(19) \qquad \frac{\Gamma(p)\,.\,\Gamma(b)}{\Gamma(p+b)} = \int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{p+b}}\,.\,dy$$

Se fizermos $p = 1 - b$, teremos

$$\Gamma(b) \, . \, \Gamma(1-b) = \int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{1+y} \, . \, dy$$

Mas

$$\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{1+y} \, dy = \int_0^1 \frac{y^{b-1}}{1+y} \, dy + \int_1^\infty \frac{y^{b-1}}{1+y} \, . \, dy$$

e operando sôbre a última integral a transformação $y = 1/x$ pode-se escrever:—

$$\int_0^\infty \frac{y^{b-1}}{1+y} \, dy = \int_0^1 \frac{y^{b-1}}{1+y} \, dy + \int_0^1 \frac{x^{1-b}}{1+\frac{1}{x}} \, . \, \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{x^{b+1}}{1+x} \, . \, dx \int_0^1 \frac{x^{-b}}{1+x} \, . \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^{b-1} + x^{-b}) \, [1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots] \, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+b} + \frac{1}{k-b+1} \right)$$

Mas, desde que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+b} + \frac{1}{k-b+1} \right) = \frac{\pi}{\text{sen } b\pi}$$

resulta:—

$$(19') \qquad \Gamma(b) \, . \, \Gamma(1-b) = \frac{\pi}{\text{sen } b\pi}$$

h) Se em (18) fizermos $x = y/1 + y$ teremos:—

$$(20) \qquad \frac{\Gamma(p) \, \Gamma(b)}{\Gamma(p+b)} = \int_0^1 x^{b-1} \, . \, (1-x)^{p-1} \, . \, dx$$

Se $p = b$ e $x = 1 - y$ tem-se

$$(21) \qquad \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = 2^{2-2p} \int_0^1 (1-y^z)^{p-1} \, . \, dy$$

da qual segue, para $p = 1/2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

i) Pondo na (21) $y^2 = z$ vem, usando novamente a (20)

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = 2^{1-2p}\int_0^1 (1-z)^{p-1} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = 2^{1-2p} \cdot \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(p+1/2)}$$

e, portanto

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(p+1/2)$$

expressão que é conhecida como fórmula de Legendre.

j) Para $a = n + 1/2$, tem-se, pela fórmula de Legendre

$$\Gamma(2n+1) = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(n+1/2) \cdot \Gamma(n+1)$$

donde

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(n+1/2)$$

Dêste resultado segue:—

$$1 \cdot 3 \ldots (2n-1) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(n+1/2)$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+1)}$$

k) Seja

$$\Phi = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

tem-se

$$\Phi^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Mas, pela (19)

$$\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) . \Gamma\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{k}{n} \pi}$$

e portanto

$$\Phi^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} . \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \ . \ . \ . \ \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n}}$$

Lembrando que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} = n . 2^{1-n}$$

tem-se

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \ . \ . \ . \ . \ . \ \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

que é o produto de Euler.

h) Consideremos a fórmula de Gauss dada pela (17) após substituir $\Gamma'(1)$ pelo seu valor dado pela (16)

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + C = \int_0^1 \frac{1 - x^{p-1}}{1 - x} . dx$$

Substituindo p por $p + k/n$ (k e n inteiros) e realizando a transformação $x = y^n$, tem-se:

$$\frac{\Gamma'\left(p + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{k}{n}\right)} + C = n . \int_0^1 \frac{y^{n-1} - y^{pn+k-1}}{1 - y^2} dy$$

do que segue

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(p + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{k}{n}\right)} + nC = n \int_0^1 \frac{n . y^{n-1} - y^{pn-1} \sum_{k=0}^{n-1} y^k}{1 - y^n} dy =$$

$$= n \int_0^1 \left(\frac{n\, y^{n-1}}{1-y^n} - \frac{y^{pn-1}}{1-y}\right) dy$$

Subtraindo desta relação o produto de n vêzes a fórmula de Gauss em que se fêz $p = pn$, teremos:—

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(p+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{k}{n}\right)} - n \cdot \frac{\Gamma'(np)}{\Gamma(np)} = n\int_0^1 \frac{1-x^{pn-1}}{1-x}\,dx =$$

$$= n\int_0^1 \left(\frac{n \cdot x^{n-1}}{1-x^n} - \frac{1}{1-x}\right) dx$$

Realizando a transformação $x = e^{-z}$, pode-se escrever:—

$$n\int_0^1 \left(\frac{n \cdot x^{n-1}}{1-x^n} - \frac{1}{1-x}\right) dx = n\int_0^\infty \left(\frac{n \cdot z \cdot e^{-nz}}{1-e^{-nz}} - \frac{z \cdot e^{-z}}{1-e^{-z}}\right) \frac{dz}{z}$$

Mas, pondo-se $F(z) = \dfrac{z.e^{-z}}{1-e^{-z}}$ tem-se

$$n\int_0^\infty \left(\frac{n \cdot z \cdot e^{-nz}}{1-e^{-nz}} - \frac{z \cdot e^{-z}}{1-e^{-z}}\right) \frac{dz}{z} = n\int_0^\infty \frac{\Gamma(nz) - \Gamma(z)}{z}\,dz = -n \log n$$

Substituindo, vem:—

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(p+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{k}{n}\right)} - n \cdot \frac{\Gamma'(np)}{\Gamma(np)} = -n \log n$$

Integrando-se em relação a p, tem-se:—

$$\log \frac{\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(np)} = -p.n.\log n + \log h$$

Como para $p = 1/n$ tem-se no primeiro membro o logaritmo do produto de Euler, pode-se, então, escrever:—

$$\log \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} = \log \frac{h}{n}$$

do que segue:—

$$h = \sqrt{n}\,.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

e portanto

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma(np)}{n^{np-1/2}}$$

que é a denominada relação de Gauss.

Consideremos agora a função beta que, como dissemos, é definida por

$$B(p.q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (p>0\,,\,q>0)$$

Notando:—

a) que para $p>1$ e $q>1$ tanto x^{p-1} como $(1-x)^{q-1}$ são limitados em todo intervalo $(0, 1)$.

b) que para $0<p<1$ e $0<q<1$, tem-se:—

para $x \longrightarrow 0$, $(1-x)^{q-1} \longrightarrow 1$, $x^{p-1} \longrightarrow \infty$, mas $1-p<1$

para $x \longrightarrow 1$, $x^{p-1} \longrightarrow 1$, $(1-x)^{q-1} \longrightarrow \infty$, mas $1-q<1$

então a integral existe para todo $p>0$ e $q>0$.

Propriedades:—

a) Fazendo $x=1-y$

$$B(p.q)=\int_0^1 (1-y)^{p-1}\,y^{q-1}.dy = B(q.p) \qquad (22)$$

e, portanto, a função é simétrica em relação a p e q.

b) Fazendo $x=y/a$

$$B(p.q)=\frac{1}{a^{p+q-1}}\int_0^a y^{p-1}\,.\,(a-y)^{q-1}\,.\,dy \qquad (23)$$

c) Fazendo $x=1/1+y$

$$B(p.q)=\int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,.\,dy \qquad (24)$$

resultado que, de acôrdo com a (18), dá:—

$$B(p.q)=\frac{\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (25)$$

d) Fazendo $x = \text{sen}^2\,\varphi$

$$B\,(p.q) = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2(p-1)}\,\varphi\,.\cos^{2(q-1)}\,\varphi\,.\,2\,\text{sen}\,\varphi\,.\,\cos\varphi\,.\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p-1}\,\varphi\,.\,\cos^{2q-1}\,\varphi\,.\,d\varphi$$

E' do conhecimento geral a importância para a estatística da integral de Dirichlet

$$I = \int\!\!\int_R \!\dots\!\int x_1^{l_1-1}\,x_2^{l_2-1}\,\dots\,x_n^{l_n-1}\,.\,dx_1\,dx_2\,\dots\,dx_n$$

para $x_i \geq 0$, para todo i, onde R é:—

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p_i} \leq 1 \qquad \text{com } l_i > 0$$

Para o cálculo desta integral façamos

$$x^p = a_i^{p_i}\,\xi_i \qquad (i = 1,\,2,\,\dots,\,n)$$

Nessas condições a região R se torna

$$\sum_{=1}^{n} \xi_i \leq 1$$

e o jacobiano de transformação será:—

$$\left|\,J\,\right| = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p_i}\;\xi_i^{\frac{1}{p_i}-1}$$

e portanto:—

$$I = \int_0^1\int_0^{1-\xi_1}\!\!\dots\int_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i} \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i^{l_i}}{p_i}\,.\,\xi_i^{\frac{1}{p_i}-1}\,.\,\xi_i^{\frac{1}{p_i}(l_i-1)}\right] d\xi_1\,.\,d\xi_2\,\dots\,d\xi_n$$

$$I = \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i^{l_i}}{p_i}\right)\int_0^1\int_0^{1-\xi_1}\!\!\dots\int_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n}\left(\xi_i^{\frac{l_i}{p_i}-1}\right) d\xi_1\,.\,d\xi_2\,\dots\,d\xi_n$$

Considerando agora que

$$I_n = \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i} \xi_n^{\frac{l_n}{p_n}-1} . d\xi_n = \frac{p_n}{l_n} . \xi_n^{\frac{l_n}{p_n}} \Bigg]_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i} = \frac{p_n}{l_n}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\right)^{\frac{l_n}{p_n}}$$

que pela (23 notando que $1 - \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i$ é constante

$$I_{n-1} = \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2}\xi_i} \left(1-\sum_{i=1}^{n-2}\xi_i - \xi_{n-1}\right)^{\frac{l_n}{p_n}} . \xi_{n-1}^{\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}-1} . d\xi_{n-1} = B\left(\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}, \frac{l_n}{p_n}+1\right) \times$$

$$\times \left(1-\sum_{i=1}^{n-2}\xi_i\right)^{\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}\ \frac{l_n}{p_n}}$$

e, anàlogamente

$$I_{n-2} = \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-3}\xi_i} \left(1-\sum_{i=1}^{n-3}\xi_i - \xi_{n-2}\right)^{\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}+\frac{l_n}{p_n}} . \xi_{n-2}^{\frac{l_{n-2}}{p_{n-2}}-1} . d\xi_{n-2} = B\left(\frac{l_{n-2}}{p_{n-2}}, \frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}+\frac{l_n}{p_n}+1\right) \times$$

$$\times \left(1-\sum_{i=1}^{n-3}\xi_i\right)^{\frac{l_{n-2}}{p_{n-2}}+\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}+\frac{l_n}{p_n}}$$

$$I_{n-3} = \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-4}\xi_i} \left(1-\sum_{i=1}^{n-4}\xi_i - \xi_{n-3}\right)^{\sum_{i=o}^{2}\frac{l_{n-i}}{p_{n-i}}} . \xi_{n-3}^{\frac{l_{n-3}}{p_{n-3}}-1} . d\xi_{n-3} =$$

$$= B\left(\frac{l_{n-3}}{p_{n-3}}, \frac{l_{n-2}}{p_{n-2}}+\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}+\frac{l_n}{p_n}+1\right) \times \left(1-\sum_{i=1}^{n-4}\xi_i\right)^{\sum_{i=o}^{3}\frac{l_{n-i}}{p_{n-i}}}$$

....

$$I_2 = \int_0^{1-\xi_1} (1-\xi_1-\xi_2)^{\sum_{i=3}^{n}\frac{l_i}{p_i}} . \xi_2^{\frac{l_2}{p_2}-1} . d\xi_2 = B\left(\frac{l_2}{p_2}, \sum_{i=3}^{n}\frac{l_i}{p_i}+1\right) \times (1-\xi_1)^{\sum_{i=2}^{n}\frac{l_i}{p_i}}$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-\xi_1)^{\sum_{i=2}^{n}\frac{l_i}{p_i}} . \xi_1^{\frac{l_1}{p_1}-1} . d\xi_1 = B\left(\frac{l_1}{p_1}, \sum_{i=2}^{n}\frac{l_i}{p_i}+1\right)$$

podemos então escrever

$$I = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i^{l_i}}{p_i}\right) \cdot \frac{l_n}{p_n} \cdot B\left(\frac{l_{n-1}}{p_{n-1}}, \frac{l_n}{p_n} + 1\right) \times B\left(\frac{l_{n-2}}{p_{n-2}}, \frac{l_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{l_n}{p_n} + 1\right) \times$$

$$\times B\left(\frac{l_{n-3}}{p_{n-3}}, \frac{l_{n-2}}{p_{n-2}} + \frac{l_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{l_n}{p_n} + 1\right) \times \ldots \times B\left(\frac{l_2}{p_2}, \sum_{i=3}^{n} \frac{l_i}{p_i} + 1\right) \times B\left(\frac{l_1}{p_1}, \sum_{i=3}^{n} \frac{l_i}{p_i} + 1\right)$$

usando a relação entre B e Γ depois de simplificações evidentes

$$I = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i^{l_i}}{p_i} \times \Gamma\left(\frac{l_i}{p_i}\right)\right]}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{p_i} + 1\right)}$$

Se $p_i = 2$ e $a_i = 1$ para todo i teremos a região $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$ e se os $l_i = 1$

$$\int_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1} \cdots \int dx_1 \ldots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

que para $n = 2$ e 3 nos dá a área do círculo e o volume da esfera.

Se $l_k = 3$ e $l_i = 1$ para todo $i \neq k$ teremos

$$\int_{\Sigma x_i^2 \leq 1} \cdots \int x_k^2 \,.\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)}$$

Uma integral que se pode calcular de modo análogo é a seguinte

$$I = \int_{\Sigma z_i^2 < 1} \cdots \int (1 - z_1^2 - z_2^2 - \ldots - z_n^2)^\nu \,.\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

com os z_i supostos positivos.

Façamos a transformação $z_i{}^2 = t_i$ e $\left| J \right| = t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{-\frac{1}{2}} \ldots t_n^{-\frac{1}{2}}$

teremos assim:—

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \cdots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1} t_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i - t_n\right)^\nu . \; t_n^{-1/2} \; . \prod_{i=1}^{n-1} t_i^{-1/2} \; . \; dt_1 \; . \; dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= B(1/2, \nu + 1) \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \dots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} t_i - t_{n-1})^{\nu+1/2} \cdot t_{n-1}^{-1/2} \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{-1/2} \, dt_1 \dots dt_{n-1}$$

$$= B(1/2, \nu+1) \times B(1/2, \nu+3/2) \int_0^1 \dots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} (1 - \sum_{i=1}^{n-3} t_i - t_{n-2})^{\nu+1} \cdot t_{n-2}^{-1/2} \cdot \prod_{i=1}^{n-3} t_i^{-1/2} \, dt_1 \dots dt_{n-2}$$

....

$$= B(1/2, \nu + 1) \times B(1/2, \nu + 3/2) \dots B\left(1/2, \nu + \frac{n-1}{2}\right) \times$$

$$\times B\left(1/2, \nu + \frac{n}{2}\right) \times B\left(1/2, \nu + \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\nu}{\frac{n}{2} + \nu} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{n}{2}\right)} \times \pi^{n/2}$$

I) Distribuição gama.

Denomina-se por tal a distribuição que tem como função de freqüência

$$(1) \quad \Gamma(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

onde α e λ são maiores do que zero.

E' imediato verificar-se que $\Gamma(x; \alpha, \lambda)$ é uma função de distribuição, pois

1.°) ela é sempre positiva;

2.°)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx = \int_0^\infty \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^\lambda} = 1$$

Função característica:—

$$(2) \quad C_x(t) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{x(it-\alpha)} \cdot x^{\lambda-1} \cdot dx =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} (\alpha - it)^{-\lambda} \cdot \Gamma(\lambda) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - it}\right)^\lambda = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}$$

Suporemos daqui por diante $\alpha = 1$. Assim sendo, teremos:—

$$\Gamma\,(x;\ \lambda) = \frac{1}{\Gamma\,(\lambda)}\ .\ x^{\lambda-1}\ .\ e^{-x}$$

$$C_x\,(t) = (1 - it)^{-\lambda}$$

Propriedades:—

Se $x \longrightarrow \infty$, para qualquer λ a função $\Gamma\ (x;\ \lambda) \longrightarrow 0$

Se $x \longrightarrow 0$, $\Gamma\ (x;\ \lambda) \longrightarrow 0$ para $\lambda \geq 1$; $\Gamma(x;\ \lambda) \longrightarrow \infty$ para $\lambda < 1$

Se $\lambda \geq 1$ a função admite um máximo. De fato,

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{1}{\Gamma\,(\lambda)}\ .\ e^{-x}\ .\ x^{\lambda-2}\,[\,(\lambda - 1) - x\,]$$

e esta derivada se anula para $x = \lambda - 1$ que sendo positivo é um ponto do campo de definição da função.

Para a derivada segunda tem-se:—

$$\frac{d^2\,\Gamma}{dx^2} = \frac{e^{-x}\ .\ x^{\lambda-3}}{\Gamma\,(\lambda)}\left[- x\,(\lambda - 1 - x) + (\lambda - 2)\ (\lambda - 1 - x) - x\right]$$

que para $x = \lambda - 1$ vale:—

$$\frac{1}{\Gamma\,(\lambda)}\left[- e^{1-\lambda}\ (\lambda - 1)^{\lambda-2}\right] < 0$$

Momentos:—

$$E\,(x^k) = \frac{1}{\Gamma\,(\lambda)}\int_0^\infty x^k\ .\ e^{-x}\ .\ x^{\lambda-1}\ .\ dx = \frac{1}{\Gamma\,(\lambda)}\int_0^\infty e^{-x}\ .\ x^{k+\lambda-1}\ .\ dx =$$

$$= \frac{\Gamma\,(\lambda + k)}{\Gamma\,(\lambda)} = (\lambda + k - 1)^{[k]}$$

do que resulta:—

$$\begin{aligned}
E\,(x) &= \lambda \\
E\,(x^2) &= \lambda\,(\lambda + 1) \\
D^2\,(x) &= \lambda \\
E\,(x^3) &= \lambda\,(\lambda + 1)\ (\lambda + 2) \\
E\,[\,(x - k)^3\,] &= 2\lambda
\end{aligned}$$

e como $\lambda > 0$ isto mostra que a curva é assimétrica à direita.

O teorema da aditividade subsiste no caso da função $\Gamma(x; \lambda)$.

De fato, sejam n variáveis aleatórias independentes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, cada uma delas tendo distribuição gama como parametros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

A soma $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ tem também distribuição gama, pois, pondo $\Sigma\lambda_i = \lambda$, tem-se

$$C_{x_r}(t) = \frac{1}{(1-it)^{\lambda_r}}$$

$$C_x(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-it)^{\lambda_j}} = \frac{1}{(1-it)^{\lambda}}$$

II) Distribuição beta.

Denomina-se por tal uma distribuição cuja função de freqüência é definida por

$$B(x, p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1) \quad (p > 0, q > 0).$$

E' imediato verificar-se que ela é efetivamente uma função de freqüência.

Momentos:—

$$E(x^k) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \int x^{k+p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx =$$

$$= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma(p+k) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+k)} = \frac{\Gamma(p+q)\ \Gamma(p+k)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(p+q+k)} =$$

$$= \frac{(p+k-1)\ (p+k-2) \ldots p}{(p+q+k-1) \ldots (p+q)} = \frac{(p+k-1)^{[k]}}{(p+q+k-1)^{[k]}}$$

Em particular:—

$$E(x) = \frac{p}{p+q}$$

$$E(x^2) = \frac{(p+1) \cdot p}{(p+q+1)\ (p+q)}$$

$$D^2(x) = \frac{p \cdot q}{(p+q+1)\ (p+q)^2}$$

Tendo-se:—

$$\frac{d\,B\,(x;\,p,\,q)}{dx} = \frac{\Gamma\,(p+q)}{\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q)}\left[x^{p-2}\,(1-x)^{q-2}\left\{(p-1)\,(1-x)-(q-1)\,x\right\}\right]$$

$$\frac{d^2\,B}{dx^2} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q)}\,.\,x^{p-3}\,(1-x)^{q-3}\left[\left\{(p-2)-(q-2)\,x\right\}\right.$$

$$\left.\left\{(p-1)\,(1-x)-(q-1)\,x\right\}-x\,(1-x)\left\{(p-1)+(q-1)\right\}\right]$$

Daqui segue que a derivada primeira se anula para $x = \dfrac{p-1}{p+q-2}$.

Assim sendo, as curvas representativas da função beta são:—

1) Suponhamos em primeiro lugar que $p>1$ e $q>1$.

Neste caso quando $x \longrightarrow 0$, $B \longrightarrow 0$ e quando $x \longrightarrow 1$, $B \longrightarrow 0$.

O ponto crítico é uma fração própria e portanto pertencente ao intervalo de definição e a derivada segunda neste ponto é negativa. Teremos, então, um máximo e uma curva do tipo i, que será simétrica ou assimétrica segundo as hipóteses que se fizer sôbre p e q.

a) Se $p = q$, $x = 1/2$ e teremos uma curva simétrica e com a função de distribuição sob a forma:—

$$\frac{\Gamma\,(2p)}{[\,\Gamma\,(p)\,]^2}\,.\,x^{p-1}\,.\,(1-x)^{p-1}$$

b) Se $p>q$ $\quad x = \dfrac{p-1}{p+q-2} > \dfrac{1}{2}$ e a curva será assimétrica à esquerda.

c) Se $p<q$, $x<1/2$ e teremos uma curva assimétrica à esquerda.

2) Suponhamos agora $p>1$ e $0<q<1$.

Para $x \longrightarrow 0$, $B \longrightarrow 0$ e para $x \longrightarrow 1$, $B \longrightarrow \infty$

e a fração $\dfrac{p-1}{p+q-2}$ é 1 ou menor do que zero e nesse caso teremos uma curva do tipo J.

3) $0<p<1$ e $q>1$

Para $x \longrightarrow 0$, $B \longrightarrow \infty$, e para $x \longrightarrow 1$, $B \longrightarrow 0$.

A fração $\dfrac{p-1}{p+q-2}$ ou é menor do que zero ou maior do que 1, de forma que não existe máximo e a curva será do tipo J invertido.

4) $0<p<1$ e $0<q<1$

Para $x \longrightarrow 0$, $B \longrightarrow \infty$ e para $x \longrightarrow 1$, $B \longrightarrow \infty$

a fração $\dfrac{p-1}{p+q-2}$ é própria e a derivada segunda é positiva e teremos uma curva em U.

Distribuição χ^2

Seja ξ uma variável $N(0,1)$, isto é, uma variável com distribuição individualizada pela função de freqüência:—

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

O primeiro problema que pretendemos resolver é a determinação da dsitribuição da variável

$$\mathfrak{y} = \xi^2$$

Considerando que o evento $\mathfrak{y} \leq y$ $(y > 0)$ verifica-se e sòmente se verifica se

$$|\xi| \leq \sqrt{y}$$

pode-se então, escrever para função de distribuição $G(y)$ de $\mathfrak{y}$:—

$$G(y) = P(\mathfrak{y} \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq \xi \leq +\sqrt{y}) = F(+\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

em que F é a função de distribuição de ξ.

Da (3) segue imediatamente para função de freqüência $g(y)$ da distribuição de $\mathfrak{y}$:—

$$g(y) = \frac{d}{dy}\, G(y) = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} f(+\sqrt{y}) + \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} f(-\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} \left[f(+\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y/2} \right]$$

ou finalmente:—

$$(4) \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-\frac{1}{2}} \,.\, e^{-y/2} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

resultado que cotejado com a (1) mostra imediatamente que a distribuição do quadrado de uma variável aleatória N(0,1) é um caso particular da distribuição gama quando nesta se supõe $\alpha = \lambda = \dfrac{1}{2}$.

2 — *Função característica:*— Da (4) segue imediatamente:—

$$C_y(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \qquad (5)$$

3 — Consideremos agora n variáveis aleatórias $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ independentes, N(0,1) e determinemos a distribuição da variável

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

A função característica de cada $\xi_j{}^2$ sendo dada pela (5) e como da independência dos ξ_j segue a dos $\xi_j{}^2$, podemos então escrever:—

$$C_{\chi^2}(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2it)^{-1/2} = (1 - 2it)^{-n/2}$$

Comparando novamente tal resultado com a (2), verificamos que a função característica de χ^2 coincide com a da distribuição gama quando nesta se supõe $\alpha = 1/2$ e $\lambda = \dfrac{n}{2}$; assim, pelo teorema da unidade de Levy, podemos escrever para a função de freqüência de $x = \chi^2$

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{n/2-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x > 0) \qquad (6)$$

e para a função de distribuição de $x = \chi^2$

$$k_{n}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{n/2-1}\, e^{-t/2} \,.\, dt$$

em que a quantidade n nela figurante é designada por número de graus de liberdade.

4 — Propriedades de $k_n(x)$:—

$$\frac{d\,k_n(x)}{dx} = C \times \left[x^{n/2-1} \,.\, e^{-x/2} . \left(-\frac{1}{2}\right) + e^{-x/2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) . x^{\frac{n}{2}-2} \right] =$$

$$= \frac{C}{2}\, x^{\frac{n}{2}-2} \,.\, e^{-\frac{x}{2}} \,(-x + n - 2)$$

Essa derivada só se anula para $-x + n - 2 = 0$, ou seja $x = n - 2$, pois, desde que $x>0$, os restantes fatôres são sempre positivos.

Consideremos, então, os dois casos:—

a) $n \leq 2$ b) $n>2$

Sob a hipótese a) não existe ponto crítico, pois $n - 2 \leq 0$ e como $x > 0$, não pode subsistir a igualdade $x = n - 2$.

Para a derivada segunda tem-se:—

$$\frac{d^2\,k_n(x)}{dx} = \frac{C}{4} \,.\, e^{-\frac{x}{2}} \,.\, x^{\frac{n}{2}-3} \left[-2x + (-x + n - 2) \quad (n - x - 4) \right]$$

que para $x = n - 2$ tem sinal coincidente com o de $-2(n-2)$, isto é, sinal negativo, do que segue a existência de um máximo no ponto $x = n - 2$.

Para $x < n - 2$ a derivada é positiva e a função é crescente; para $x > n - 2$ a derivada é negativa e a função é decrescente.

Para $x \longrightarrow 0$, $k_n(x) \longrightarrow 0$ e para $x \longrightarrow \infty$, $k_n(x) \longrightarrow 0$. Teremos, então, uma curva do tipo i.

5 — Momentos:—

$$E(x^k) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{k+\frac{n}{2}-1} . e^{-\frac{x}{2}} . dx = 2^k \,.\, \frac{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= n\,(n+2)\,.\,.\,.\,(n+2k-2)$$

Em particular

$$E(x) = n$$

$$E(x^2) = n\,(n+2)$$

$$D^2(x) = 2n$$

6 — *Teorema da atividade:*—

Se $\chi_1^2, \chi_2^2, \ldots\ldots, \chi_p^2$ têm distribuição χ^2 com $n_1, n_2, \ldots\ldots n_p$ graus de liberdade, a variável

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} \chi_j^2$$

terá distribuição X^2 com $\sum_{j=1}^{n} n_j$ graus de liberdade.

Com efeito, a função característica de χ_j^2 vale:—

$$C_{\chi_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n_j}{2}}$$

do que segue

$$C_{\chi^2}(t) = \prod_{j=1}^{p} C_{\chi_j^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} n_j} = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

e portanto χ^2 tem distribuição χ^2 com $n = \sum_{j=1}^{p} n_j$ graus de liberdade.

7 — Freqüentemente interessa saber a probabilidade de que χ^2 assuma um valor maior ou igual a um fixado χ_o^2, isto é, $P(\chi^2 \geq \chi_o^2)$, ou seja, geomètricamente, saber a área delimitada pela curva e situada à direita do ponto χ_o^2 e isto, evidentemente será dado por:—

$$P(\chi^2 \geq \chi_o^2) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi_o^2}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx = 1 - k_n(\chi_o^2)$$

Para calcular o valor de P comecemos por fazer a transformação $x = y^2$, que é biunívoca pois $x>0$. Tem-se:—

$$P(\chi^2 \geq \chi_o^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi_o}^{\infty} y^{n-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy$$

Por dupla integração por partes em que se faz $dv = y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ obtém-se:—

$$\int_{\chi_o}^{\infty} y^{n-2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} \cdot \chi_o^{n-2} + (n-2)\left\{ e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} \cdot \chi_o^{n-4} + \right.$$

$$\left. + (n-4)\int_{\chi_o}^{\infty} y^{n-5} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy \right\}$$

Podemos, então, fazer duas hipóteses: 1) n = ímpar. Então, n — 1 é par e, neste caso, por aplicação repetida, atingiremos um valor n — k (k ímpar) = 0 e teremos uma integral de cálculo imediato. 2) n = par. Nessas condições atingiremos n — k' = 1 (k' ímpar) e portanto a uma integral primitiva.

Mais especificadamente, suponhamos n ímpar

$$P = \left\{ e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} . \chi_o^{n-2} + (n-2)\, e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} . \chi_o^{n-4} + \ldots + (n-2)(n-4)\ldots 3 . e^{-\frac{\chi^2}{2}} . \chi_o + \right.$$

$$\left. + (n-2)(n-4)\ldots 3.1 . \int_o^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dx \right\} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

do que segue substituindo $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ por $\frac{n-2}{2} . \frac{n-4}{2} \ldots . \frac{1}{2} . \sqrt{\pi}$ e após simplificações evidentes:—

$$P = \left\{ e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} \left(\chi_o + \frac{\chi_o^3}{1.3} + \frac{\chi_o^5}{1.3.5} + \ldots + \frac{\chi_o^{n-2}}{2.4\ldots(n-2)} \right) + \int_{\chi_o}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} .dy \right\} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Para n par obteremos fàcilmente:—

$$P = e^{-\frac{\chi_o^2}{2}} \left(1 + \frac{\chi_o^2}{2} + \frac{\chi_o^4}{2.4} + \ldots + \frac{\chi_o^{n-2}}{2.4\ldots(n-2)} \right)$$

Por exemplo, seja $\chi_o = 1$ e $n = 2$

$$P = e^{-1/2} \;\}\; \log P = \bar{1},78285275 \;\}\; P = 0,60653$$

*
* *

Consideremos a seguir n variáveis aleatórias independentes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ cada uma $N(0,\sigma)$ e procuremos a distribuição de $y = \sum_{r=1}^{n} \xi_r^2$.

Ora, as variáveis $\frac{\xi_1}{\sigma}, \frac{\xi_2}{\sigma}, \ldots, \frac{\xi_n}{\sigma}$ sendo $N(0,1)$ a função de freqüência da variável $x = \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_r^2}{\sigma^2}$ é:—

$$\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} . x^{\frac{n}{2}-1} . e^{-x/2}$$

Mas

$$y = \sigma^2 \frac{\sum \xi_r^2}{\sigma^2} = \sigma^2 x ,$$

do que segue para função de freqüência de y notando que o jacobiano de transformação é $\frac{1}{\sigma^2}$

$$\frac{1}{2^{n/2}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2\ 2^{n/2}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

Seja agora

$$z = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \xi_r^2 = \frac{1}{n} y$$

Do resultado precedente segue imediatamente para a função de freqüência de z, notando que o jacobiano de transformação vale n:—

$$\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sigma^n\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot z^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{nz}{2\sigma^2}}$$

Consideremos a seguir

$$v = \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \xi_r^2}$$

Tem-se:—

$$G(v) = P(y \leq v^2) = F(v^2)$$

Substituindo na ( ) e notando que $dy = 2v.dv$, tem-se para função de freqüência de v

$$\frac{2}{\sigma^n \cdot 2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{n-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Seja agora

$$w = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \xi_r^2}$$

então a função de freqüência desta variável é:—

$$f(w) = \frac{2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{n-1} \cdot e^{-\frac{n}{2} \cdot \frac{y^2}{\sigma^2}}$$

Distribuição de "Student"

Sejam ξ, ξ_1, ..., ξ_n, $n + 1$ variáveis aleatórias independentes tendo todas distribuição $N(0,\sigma)$. Consideremos a variável $\eta = + \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma \xi_r^2}$ e procuremos a distribuição de $t = \frac{\xi}{\eta}$.

Seja $S_n(x)$ a função de distribuição de t. Tem-se:—

$$S_n(x) = P(t \leq x) = P\left(\frac{\xi}{\eta} \leq x\right)$$

Determinemos em primeiro lugar $f(\xi, \eta)$.

Notando que por hipótese ξ é independente de ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n e portanto independente de $\sum_{r=1}^{n} \xi_r^2$. Assim sendo, a função de freqüência de (ξ, η) é o produto das funções de freqüência de ξ e η.

Mas a função de freqüência de ξ, sendo, por definição,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$$

e a função de freqüência de η pela ( ) sendo

$$\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sigma^n \; \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \eta^{n-1} \cdot e^{-\frac{n \cdot \eta^2}{2\sigma^2}}$$

Então, a função de freqüência conjunta de ξ, η será:—

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \eta^{n-1} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{n\eta^2}{2\sigma^2}}$$

Como η é positivo e para qualquer $\eta > 0$, $\frac{\xi}{\eta} \leq x$ verifica-se e só se verifica se $\xi \leq \eta\, x$, podemos escrever:—

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} \leq x\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sigma^{n+1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\eta x} \eta^{n-1} \cdot e^{-\frac{\xi^2 + n\eta^2}{2\sigma^2}} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Procuremos, agora, retirar a variável η dos limites de integração. Para tanto definamos a transformação:—

$$\xi = u \cdot v \qquad\qquad v = \eta$$

cujo jacobiano vale: — v.

Notando que, com isto, os limites de integração passam a ser

$$-\infty < u < x, \quad 0 < \eta < \infty$$

podemos escrever:—

$$S_n(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sigma^{n+1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} du \int_0^{\infty} v^n \cdot e^{-v^2 \frac{u^2+n}{2\sigma^2}} \cdot dv$$

Mas, podendo-se escrever tendo em vista a (7)

$$\int_0^{\infty} v^n \cdot e^{-v^2 \cdot \frac{u^2+n}{2\sigma^2}} \cdot dv = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (v^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-v^2 \cdot \frac{u^2+n}{2\sigma^2}} \cdot d(v^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{u^2+n}{2\sigma^2}\right)^{n+1}}$$

tem-se:—

$$S_n(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sigma^{n+1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{u^2+n}{2\sigma^2}\right)^{n+1}} \cdot du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot du$$

que é a função de distribuição de t. Daqui segue imediatamente para a função de freqüência de t:—

$$s_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

2 — Propriedades:—

a) a distribuição é independente de σ;

b) a distribuição é simétrica em tôrno do ponto 0;

c) o expoente da quantidade entre parêntesis sendo negativo é evidente que o eixo das abcissas é uma assintota;

d) o ponto $x = 0$ é um ponto de máximo;

e) α_k é finito para $k < n$.

Com efeito:—

$$E(x^k) = C \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} . \, x^k . \, dx$$

Para $x \longrightarrow \pm \infty$, $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ é um infinitésimo de ordem $n + 1$; o segundo fator é um infinitésimo de ordem $-k$ e a ordem do infinitésimo integrando será $n - k + 1$ e para que a integral exista é suficiente que $n > k$.

Momentos da distribuição: — Da simetria da curva em tôrno do ponto 0 segue

$$\alpha_{2k+1} = \mu_{2k+1} = 0$$

Para os momentos de ordem par tem-se:—

$$\mu_{2k} = \alpha_{2k} = E(x^{2k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \, . \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} . \, dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \, . \, \frac{n^k}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \left(\frac{x^2}{n}\right)^{k-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} . \, d\left(\frac{x^2}{n}\right)$$

e como pela (24) a integral vale $B\left(k+\frac{1}{2},\frac{n-2k}{2}\right)$ pode-se escrever utilizan do da (25) e aplicando k vêzes a (5):—

$$\mu_{2k} = \alpha_{2k} = \frac{n^k}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right) =$$

$$\frac{n^k}{\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{2}-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}\cdot\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right) =$$

$$= \frac{n^k}{(n-2)\dots(n-2k)}\cdot\frac{(2k)!}{2^k.k!} = n^k\cdot\frac{1.3.\dots.(2k-1)}{(n-2)\,(n-4)\dots(n-2k)}$$

Em particular:—

$$D^2(x) = \frac{n}{n-2}$$

$$\mu_4 = \frac{3n^2}{(n-2)\,(n-4)} > 3$$

e para n diferente de 2 e 4 esta última desigualdade indica, pois, que a distribuição t é leptokúrtica.

Distribuições "F" e "z".

Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ e $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ são $n+m$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(0,\sigma)$.

Consideremos $X = \frac{\xi}{\eta}$ onde $\xi = \sum_{r=1}^{m}\xi_r^2$ e $\eta = \sum_{r=1}^{n}\eta_r^2$

Notemos em primeiro lugar que $X \geq 0$ e a função de distribuição de X será nula para $X < 0$.

Determinemos as funções de freqüência de ξ e η

Como ξ e η são somas de quadrados de m e n variáveis eleatórias independentes $N(0,\sigma)$, suas respectivas funções de freqüência são pela (6):—

$$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\cdot\sigma^m\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\xi^{\frac{m}{2}-1}\cdot e^{\frac{\xi}{2\sigma^2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma^n\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\eta^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\eta}{2\sigma^2}}$$

Dêste resultado segue para função de freqüência conjunta de (ξ, η) notando que elas são independentes

$$\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \cdot \sigma^{n+m} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \eta^{\frac{n}{2}-1} \cdot \xi^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\xi+\eta}{2\sigma^2}} .$$

e, portanto, como no caso de Student, notando porém que no caso presente $\xi > 0$

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} \leq x\right) = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}} \cdot \sigma^{n+m}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

$$\int_0^{\eta x} \int_0^{\infty} \xi^{\frac{m}{2}-1} \cdot \eta^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\xi+\eta}{2\sigma^2}} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Fazendo novamente $\eta = v$ e $\xi = \mu v$ vem

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} \leq x\right) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \cdot \sigma^{n+m} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^x \mu^{\frac{m}{2}-1} \cdot d\mu \int_0^{\infty} v^{\frac{n+m}{2}-1} \cdot$$

$$e^{-v \cdot \frac{\mu+1}{2\sigma^2}} \cdot dv = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \cdot \sigma^{n+m} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{\mu+1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot d\mu$$

donde finalmente

$$P\left(\frac{\xi}{\eta} \leq x\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \mu^{\frac{m}{2}-1} \cdot (\mu+1)^{-\frac{m+n}{2}} \cdot d\mu$$

que é a função de distribuição de χ. Denotando-a por $G_{m,n}(x)$ pode-se escrevre para a função de freqüência de χ:—

$$g_{m,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}$$

Isto pôsto, seja:—

$$F = \frac{\frac{1}{m} \sum_{r=1}^{1} \xi_r^2}{\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \eta_r^2} = \frac{n}{m} \cdot \chi$$

tem-se imediatamente para função de freqüência de F

$$f\,(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{m}{n} \cdot F\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}\, F\right)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{m}{n}$$

ou denotando F por x:—

$$f\,(x) = \frac{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n + m\,x)^{\frac{m+n}{2}}}$$

que é independente de σ.

Propriedades de F: — Consideremos os três casos:—

a) $m<2$ b) $m=2$ c) $m>2$

Se $m=2$ o expoente do numerador é nulo. Quando $x \longrightarrow 0$ o denominador tende para $n^{\frac{n+m}{2}}$ e F tende, então, a uma quantidade finita. Se $x \longrightarrow \infty$ o denominador tende a ∞, $F \longrightarrow 0$ e teremos uma curva em J invertido.

Se $m<2$ o expoente do numerador é negativo. Quando $x \longrightarrow 0$ e F tende para ∞

Para $x \longrightarrow \infty$, $F \longrightarrow 0$, e teremos novamente uma curva em J invertido.

Se $m>2$ o expoente do numerador é positivo. Quando $x \longrightarrow 0$, o numerador $\longrightarrow 0$ e $F \longrightarrow 0$

Se $x \longrightarrow \infty$ a função tende a zero e teremos uma curva em i. Neste caso é fácil ver que a função tem um máximo para $x = \frac{m-2}{n+2} \cdot \frac{n}{m}$.

Momentos de F:—

Utilizando da (24) podemos escrever:—

$$E(F) = \frac{n}{m} E(\chi) = \frac{n}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{m}{2}} (1+x)^{-\frac{m+n}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot B\left(\frac{m}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

De forma análoga

$$E(F^2) = \frac{n^2 (m+2)}{m (n-2) (n-4)} \qquad (n > 4)$$

do que se deduz

$$D^2(F) = \frac{2 n^2 (n + m - 2)}{m (n-2)^2 (n-4)} \qquad (n > 4)$$

Consideremos a quantidade $z = 1/2 \log F$, que varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Tendo-se $F = e^{2z}$

$P(z \leq x) = P(F \leq e^{2x}) = H_{m,n}(e^{2x})$ em que H é a função de distribuição de F. Daqui segue que a função de freqüência de z será:—

$$h_{m,n}(e^{2x}) \cdot 2 \cdot e^{2x}$$

ou seja:—

$$2 \cdot e^{2x} \cdot \frac{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \left(e^{2x}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(n + m e^{2x}\right)^{\frac{m+n}{2}}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{e^{mx}}{\left(n + m e^{2x}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

SUMARIO

O autor, numa primeira parte, deduz, de forma accessível, as principais propriedades das funções beta e gama e numa segunda parte utiliza dêstes resultados para dar uma visão sintética das funções de variáveis aleatórias unidimensionais normalmente distribuidas, que maior interêsse oferecem para a estatística.

SUMMARY

The A. deducts in a easy understandable way first the properties of beta and gama functions, then he uses the results for a synthetic birds view of unidimensional normally distributed aleatory variable functions which offer the most concern in statistics.

BIBLIOGRAFIA

Burington, R. S. e Torrance, C. C. — Higher Mathematics — Mac Graw-Hill. Book Company, Inc. — 1939.

Cramér, H. — Mathematical Methods of Statistics — Princeton University Press — 1946.

Franklin, P. — A Treatise on Advanced Calculs — John Willey & Sons, Inc. — 1947.

Gillespie, R. P. — Integration — Oliver and Boy — 1939.

La Vallée Poussin, Ch. J. — Cours d'Analyse Infinitesimal — Dover Publications — 1946.

Weatherburn, C. E. — A first Course in Mathematical Statistics — Cambridge University Press.