Ciência & Filosofia. n. 5, p. 107-124, 1996.

São Vivenciais os Fundamentos da Matemática? (Notas sobre Três Idéias Geradoras de Abordagens Antifundacionistas em Filosofia da Matemática)

Walzi C.S. da Silva*

I. Preliminares

Entre todos os problemas que compõem a reflexão filosófica sobre o conhecimento lógico-formal, dois se destacam: o problema da natureza dos objetos lógico-matemáticos, e o problema da qualidade epistemológica do conhecimento matemático. Ao longo dos anos do nosso século, esses problemas foram tratados de diversas maneiras; no que tange à discussão epistemológica sobre o conhecimento lógico-formal, podemos assinalar as que adotam uma estratégia *fundacionista* e as que adotam uma estratégia *antifundacionista* no tratamento do problema. Como sugerem esses nomes, as abordagens fundacionistas do conhecimento lógico-formal pretendem qualificá-lo epistemologicamente mediante a oferta de fundamentos, ao passo que as abordagens antifundacionistas compreendem que fundamentos ou bem são *impossíveis*, ou bem *não vêm ao caso* para a boa qualificação epistemológica do conhecimento da lógica e da matemática.

---

* Professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal Fluminense.

Até os meados da década de 70, entre as abordagens filosóficas clássicas sobre o conhecimento matemático, somente duas correntes possuiam declinação antifundacionista. O formalismo, porque compreendia o caráter epistemologicamente superior da matemática como sendo decorrente da efetividade da sintaxe das linguagens formais, e o intuicionismo, que não via sentido no projeto fundacionista ortodoxo do logicismo, porque este desobedecia a exigências finitistas.

Entre as duas correntes de inspiração antifundacionista, o intuicionismo destacava-se por não se limitar a uma atitude negativa contra o fundacionismo, mas além dela propor uma concepção positiva do caráter peculiar do conhecimento matemático. Para um intuicionista, como se sabe, se o conhecimento lógico-formal possui um "fundamento", esse fundamento reside na intuição do matemático; para a constituição de conhecimento matemático seguro, basta que o matemático certifique-se de estar exercendo essa espécie de intuição, epistemologicamente qualificadora, desde que sob o controle de exigências construtivistas, pois a qualidade epistemológica da matemática, no entender de um intuicionista, possui uma base ontológica: os objetos da matemática devem ser construtíveis, ou seja, não devem violar certos limites da intuição dos matemáticos. A base ontológica do matemático intuicionista serve portanto de instrumento para o controle da qualidade epistemológica da matemática intuicionista. Se estabelecemos uma ontologia finitista para a matemática, estamos simultaneamente estabelecendo a garantia epistemológica do conhecimento matemático.

São conhecidos os limites dessas abordagens. Sabe-se bem que o projeto fundacionista clássico do logicismo foi detido pela enorme dificuldade de se percorrer o caminho de volta, do puramente lógico ao plenamente matemático, sem admitir princípios e objetos extralógicos (e.g., sabe-se que na base axiomática da teoria dos conjuntos o indispensável axioma da escolha realiza uma estipulação ontológica que não é tradutível em termos puramente lógicos). São amplamente conhecidos os teoremas limitadores do formalismo, bem como são conhecidas as dificuldades (ou ao menos a grande complexidade envolvida no ato) de o matemático intuicionista construir, uma vez que obedeça a suas próprias exigências, objetos indispensáveis ao conhecimento matemático, sua gênese e suas aplicações.

discussão em nossos anos apenas se inicia, sendo então mais difícil mapear quem é quem no sustentar dessas teses. Mas há certas chaves que nos permitem identificar um antifundacionista genuíno, ou reconhecer teses antifundacionistas genuínas. Podemos dividir essas chaves em dois grupos: teses geradoras e teses decorrentes (decorrentes das teses geradoras). O presente artigo irá deter-se nas teses geradoras da concepção antifundacionista da lógica e da matemática, transferindo a um *follow-up* em preparação a apresentação e discussão das teses decorrentes.

III. Teses geradoras

1. Wittgenstein, Strawson e Bloor sobre a compulsão da necessidade lógica

Uma primeira importante tese geradora do antifundacionismo é wittgensteiniana, tendo sua origem em aforismos como o seguinte:

> O que tem que ser aceito, o dado, são, por assim dizer, formas de vida (Wittgenstein 14, 226e).

É possível que haja também relações dessa tese com uma tese de Strawson a respeito de certas formas de cognição que a nós se impõem sem escolha. Assim se manifesta Strawson, por exemplo, sobre a lógica indutiva:

> Hume... jamais pensou que as crenças indutivas fossem convencionais. Ele assinalava-as como naturais. Hume não julgava que nossos 'cânones básicos' fossem arbitrariamente escolhidos; antes considerava-os algo que, no nível fundamental da formação de nossas crenças, não envolvia absolutamente qualquer escolha de nossa parte. ... [Nossa] aceitação de cânones básicos nos é forçada pela natureza.

A leitura sociológica dessa passagem consiste em equacionar *necessidade lógica* a *compulsão socialmente determinada*. Nós seguimos regras da lógica porque, parafraseando Strawson, elas nos seriam forçadas pela nossa *natureza social*.

Nessa tese reside um perigo que assombra a casa dos filósofos clássicos da matemática. Trata-se de uma tese com conseqüências relativistas, como depreendemos da seguinte passagem de Bloor:

> Não haverá uma codificação única de nossas propensidades naturais ao raciocínio, assim como não há um conjunto único de convenções estruturadoras de nossas demais tendências básicas (Bloor 2, p. 123).

Se a compulsão da necessidade lógica tem raízes sociais, a necessidade lógica poderá ser um fenômeno sujeito a variação ao longo de distintos contextos sociais. Essa é uma segunda tese geradora da pesquisa antifundacionista.

2. Bloor sobre matemáticas alternativas

A primeira reação diante dessa leitura poderia bem ser a de chamar o(s) exemplo(s) de matemática(s) alternativa(s), possivelmente determinadas por outras cristalizações de hábitos sociais. Em outra de suas obras, Bloor investiga esse assunto:

> Como seria uma matemática alternativa?
> Parte da resposta pode ser dada facilmente. Uma matemática alternativa nos pareceria erro ou inadequacão. Uma genuína alternativa à nossa matemática nos conduziria ao longo de caminhos que não estamos espontaneamente inclinados a seguir. Ao menos alguns de seus métodos e passos de raciocínio teriam que violar nosso sentido de propriedade cognitiva e lógica. Veríamos talvez conclusões alcançadas,

> com as quais simplesmente não concordamos. Ou poderíamos ver provas aceitas sobre resultados aceitos, onde tais porvas, contudo, não nos pareceriam provar absolutamente nadal. Diríamos então que a matemática alternativa teria obtido a resposta certa pela razão errada. Reciprocamente, veríamos talvez linhas de raciocínio claras e compulsórias – compusórias do nosso ponto de vista –, rejeitadas ou ignoradas. Uma matemática alternativa poderia estar imersa em um inteiro contexto de propósitos e significados pronunciadamente estranhos à nossa matemática. Tais pontos talvez nos parecessem quase ininteligíveis (Bloor 1, p. 95-6).

Cabe indagar se o relativismo decorrente dessa concepção da matemática seria danoso ou inócuo para os que compreendem que o conhecimento lógico-formal disponha de uma qualidade epistemológica distintiva. As opiniões aqui divergem. Há reações viscerais contra essa perspectiva pluralista, como, e.g., a de Hardy, contemporâneo de Wittgenstein:

> Creio que a realidade matemática se encontra fora de nós, que nossa função é descobrí-la ou observá-la, que os teoremas que provamos, por nós descritos sem modéstia como nossas 'criações', são não mais do que notas de nossas observações (Hardy 7, p. 123-4, *apud* Bloor 2, p. 84).

Qualquer filósofo da matemática de persuasão platonista reagirá muito provavelmente de modo semelhante ao de Hardy, perante a tese de que haja uma alternativa epistêmica à matemática, até porque dessa alternativa epistêmica poderá decorrer uma alternativa ontológica de objetos matemáticos. O ataque mais forte contra a posição de Bloor tentará desqualificá-la como irracionalista: uma posição que reduz o reino certo, seguro e regular da matemática ao império das idiossincrasias permissivas do erro formal e da licensiosidade ontológica.

Os sociólogos da matemática, a partir do próprio Bloor, manifestaram-se no sentido de argumentar que nem sempre o irracionalismo

distintos códigos de compulsão lógico-matemática comparáveis a distintas éticas (sociais) da cognição. Isso conduz à terceira e última idéia geradora que apresentaremos: a saber, a discussão sobre um possível caráter local contingente, em oposição a um possível caráter transcendental e absoluto, do conhecimento matemático.

3. Livingston sobre fundamentos vivenciais da matemática

Uma das abordagens mais interessantes sobre o tópico em questão é desenvolvida por David Livingston em seu livro *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics* (Livingston 8). O volume foi resenhado por David Bloor (Bloor 3), e a resenha expõe de modo agudo a estratégia da obra.

Livingston afirma que as estratégias fundacionais utilizadas pelos fundacionistas sempre fazem a matemática repousar sobre sistemas outros que, em seu turno, são carentes de fundamentos. Boa formulação desse argumento encontramos na mencionada resenha:

> Livingston afirma que seu interesse reside nos 'fundamentos vivenciais' *(living foundations)* da matemática (Livingston 8, p. x), em contraste com os estudos 'clássicos' sobre os fundamentos. Estudos clássicos, como os de Russell, objetivam prover uma definição dos conceitos matemáticos em termos de conceitos lógicos ainda mais básicos. A meta desses estudos é justificar a matemática, derivando suas operações, tal com a adição, de operações lógicas formalizadas de tipo ainda mais primitivo. Contudo, todos os processos fundamentais de raciocínio subjacentes à nossa manipulação de símbolos matemáticos permanecem, sem dúvida, também na abordagem clássica; tais processos vitais permanecem tão ocultos como sempre estiveram. Os fundamentos vivenciais permanecem, portanto, à espera de elucidação, sendo sobre ela o livro de Livingston (Bloor 3, p. 337-8).

Podemos traduzir, algo livremente, *living foundations* como fundamentos vivenciais. Segundo Livingston, o real fundamento da matemática não reside em sistemas de semelhante estatuto epistêmico ou epistemológico (como a teoria dos conjuntos ou, em última instância, a lógica), nem tampouco residem em organismos sintáticos ou na intuição do matemático. O real fundamento é vivencial, fruto da experiência do matemático no contexto de trabalho no qual a matemática se realiza.

É claro que isso requer cuidadosa exposição. Primeiramente, é necessário elucidar em que sentido o estudo de Livingston é denominado etnometodológico. Em segundo lugar, cabe expor dois elementos que o autor apresenta como constituintes da dimensão vivencial, de ordem social, dos fundamentos etnometodológicos do conhecimento lógico-formal.

A etnometodologia é uma das correntes metodológicas da sociologia contemporânea de inspiração analítico-lingüística. Não importando aos limites das presentes notas mencionar detalhes mais complexos da articulação da perspectiva, cumpre assinalar apenas que a etnometodologia concebe o escopo da teorização sociológica como sendo pequeno *(narrow ranged),* em oposição aos grandes sistemas de sociologia que em muitos momentos do nosso século visaram a codificar a disciplina. O etnometodólogo acredita que a sociologia deve prender-se à discussão dos detalhes *intimistas* de uma cultura: a partir desses detalhes, uma concepção mais ampla da comunidade, e posteriormente da sociedade, pode ser construídas. Além da declinação *narrow ranged,* a etnometodologia supõe que o fenômeno a ser considerado na análise sociológica deve necessariamente ser lingüístico. Os detalhes intimistas de uma cultura traduzem-se nos proferimentos de linguagem que os membros da cultura produzem em seu cotidiano. Esses proferimentos oferecem acesso aos genuínos fatos sociais, às estruturas de significado, às peculiaridades a serem compreendidas, no âmbito mais geral de uma cultura. Usa-se aqui o termo "intimista" para que essa visão do objeto da sociologia faça jus ao desejo do etnometodólogo: são *intimistas* aqueles detalhes que os próprios membros da comunidade sob estudo consideram íntimos, e que constantemente se apresentam velados ao observador externo.

3.1. Analisabilidade natural

Livingston compreende a analisabilidade natural da prova, ou como ele prefere colocar, a analisabilidade natural perante a legião de produtores do conhecimento matemático, como (i) o fácil acesso à prova através de uma objetividade prática; (ii) o caráter anônimo das provas mais rotineiras; (iii) o rigor passível de ser testemunhado, por qualquer praticante da matemática, na conquista da prova (cf. Livingston 8, p. 23 e Bloor 3, p. 340).

Segundo Livingston, o rigor do conhecimento lógico-formal, bem como a qualidade epistemológica distintiva que historicamente tem sido atribuída à matemática, originam-se nos três elementos acima, todos construídos socialmente por um acordo tácito entre os membros da legião de produtores. Assim escreve Livingston:

> (...) é ao curso da, e através do trabalho sobre, a elaboração de definições/provas da sintaxe aritmetizada, naquilo em que elas são de uma compatibilidade mútua produzida – compatibilidade dessas definições/provas com as técnicas de trabalho com as funções e relações recursivas primitivas que um provador adquire a descoberta/construção da ordem *(ordeliness)* do processo original de especificação da sintaxe formal (Livingston 8, p. 125).

Ao longo de sua análise, Livingston constrói um conceito cuja função é captar a justa dimensão social desse processo de ajuste interno dos padrões de produção do conhecimento matemático, processo esse que é simultâneo a toda construção e reprodução locais de segmentos desse conhecimento. O termo é *compromisso de prova (proof schedule)*. Os matemáticos sabem tabular passos que devem obrigatoriamente ser seguidos para que dominem com proficiência sua arte; desenvolvem localmente as provas segundo esses compromissos, sob o olhar virtual de seus colegas, da legião de produtores, testemunhas onipresentes.

3.2. Vivência local e caráter transcendental

Torna-se evidentemente muito importante, para Livingston, explicar sociologicamente o que poderíamos denominar de *transcendental shift:* como é possível o conhecimento matemático vivenciado adquirir um aspecto pelo qual é freqüentemente tomado como transcendental, não-testável, absoluto etc.? O que afinal pode acontecer, durante a condução de uma prova, que faça com que a legião de produtores da matemática considere como transcendentais seus compromissos de prova?

Como assinala Bloor, na abordagem de Livingston

> O fascinante feito de criar verdades matemáticas universais, compulsórias e eternas é obtido inteiramente pelo que vai, digamos, no quadro-negro (Bloor 3, p. 341).

Ocorre que temos aí uma tensão. Como podem ser considerados transcendentais os frutos produzidos por um trabalho local? Parecemos ter sido conduzidos a um paradoxo, em palavras do próprio Livingston,

> (...) on the one hand, we have seen that the properties of a schedule of proofs are essentially tied to the local work of a schedule's production and review; on the other, it is nevertheless the case that over the course of that local work, that work retains its sense as the working out of an objectively and transcendentally ordered course of work that that self-same work exhibits and to which that work provides increasingly technical access (Livingston 8, p. 125).

A resposta de Livingston é aproximadamente a seguinte: o caráter transcendental é causado pelo trabalho local. O caráter transcendental não só ocorre enquanto vivenciamos a prova, mas ocorre porque vivenciamos a prova. É a familiaridade extremamente íntima do matemático com a prova que cria a vivência de que os compromissos de prova possuam um caráter transcendente da própria vivência da prova. Novamente ao espírito do que discutimos acima, o matemático não exerceria nesse caso uma escolha: o caráter transcendental se lhe imporia em virtude de ele estar imerso no tipo de trabalho que ele vivencia. Livingston argumenta, a partir daí, que o caráter transcendental é produzido, em última instância, pela recorrente vivência, por parte do matemático, dos já mencionados processos de auto-regulagem dos compromissos de prova. Temos aí algo semelhante às *mãos de Escher:* uma gravura do conhecido artista holandês, em que duas mãos se sobrepõem em uma folha de papel, cada uma delas desenhando simultaneamente a outra. Porquanto isso pareça à análise clássica peticionário de princípio, em um contexto em que uma dessas mãos é sociológica e vivencial, e outra transcendental, não é de todo impossível compreender que o processo de vivência da prova gere os padrões de rigor da própria prova.

IV. Considerações finais

As breves notas acima delineiam, pois, as teses geradoras da abordagem de Livingston para a idéia de uma fundamentação do conhecimento matemático. É claro que os termos "fundamentação" e "fundamentos" não são utilizados nesse contexto sob a mesma acepção que recebem na tradição clássica. Abordagens como as de Livingston e Bloor são claramente antifundacionistas: repelem a idéia de que em virtude de fundamentos universalmente válidos o conhecimento lógico-formal possa ser dito racional.

Não é do escopo das presentes notas apresentar uma crítica à modalidade de pesquisa antifundacionista ora apresentada. Tal crítica é no entanto possível e mesmo desejável. Uma filosofia da matemática de inspiração wittgensteiniana está longe de ser algo destituído de controvérsia. Como se sabe, o caráter aforístico e por vezes enigmático das idéias de Wittgenstein favorece em seus intérpretes atividades sujeitas a *bias,* como a que realizamos, e.g., ao tentarmos descobrir formas de animais em nuvens: é demasiadamente possível imputar formas das mais diversas às nuvens, tanto quanto é possível imputar interpretações relativamente diversas aos aforismos compactos e sugestivos, e.g., das *Philosophical Investigations* (Wittgenstein 14) e das *Remarks on the Foundations of Mathematics (idem* 13).

A leitura sociológica da matemática produzida por Bloor é interessante, mas trata-se de uma extensão idiossincrática da filosofia do segundo Wittgenstein, devendo portanto ser tratada com a maior acurácia possível. Já os pontos sensíveis da abordagem de Livingston são, naturalmente, o nexo entre caráter local e caráter transcendental, bem como a característica *short-ranged* de todas as abordagens de inspiração etnometodológica. Fica também obscuro o que devemos pensar do importe existencial da matemática e da lógica sob o prisma acima esboçado.

Tudo isso merece cuidadosas considerações críticas, mas, se tais considerações não foram aqui desenvolvidas, devemos ao menos conceder a essas abordagens o beneplácito da dúvida, em especial evitando uma uma reação possível, comum entre os adeptos de um tratamento clássico para o problema da fundamentação da matemática, perante as idéias aqui expostas. Trata-se da reação de crer simplesmente que de todo escape o ponto às abordagens antifundacionistas, alegando-se que os problemas por elas privilegiados não estejam realmente envolvidos na discussão crítica do estatuto racional e do importe ontológico do conhecimento lógico-formal. Essa reação não nos parece adequada, mesmo para quem privilegie o paradigma clássico. Os sociólogos da matemática existem, e estão a trabalho. Suas abordagens fustigam de perto a idéia de conhecimento racional. Ainda que esses questionamentos devam ser coibidos com uma resposta restritiva ou mesmo completamente negativa, essa resposta deve ser feita de maneira explícita e bem instanciada. Não podemos nos limitar a ignorar esse combativo setor da reflexão sobre o conhecimento lógico-formal.

Resumo: Nas notas que se seguem são esboçados pontos de vista característicos de posições antifundacionistas sobre o conhecimento matemático, seu rigor e seu caráter compulsório. Uma breve caracterização da linhagem intelectual dessas posições é oferecida, dando lugar à breve discussão de três idéias geradoras da perspectiva. Tais idéias são (1) a abordagem de Wittgenstein sobre a necessidade lógica; (2) a abordagem de Bloor sobre matemáticas alternativas e (3) a abordagem de Livingston sobre fundamentos vivenciais da matemática. As notas não incluem considerações críticas, permanecendo predominantemente expositivas.
Palavras-chave: filosofia da matemática – fundacionismo – necessidade lógica

Abstract: In the following we present a number of notes about antifoundationist views of mathematical knowledge, its rigour and its compelling character. A brief sketch of the intellectual pedigree of such views is given; then three source-ideas are presented and very briefly discussed. These ideas are (1) Wittgenstein's approach of logical necessity; (2) Bloor's approach of alternative mathematics and (3) Livingston's ethnomethodological approach of living foundations of mathematical knowledge. The notes do not include extensive criticism: they remain mainly informative.
Key-words: philosophy of mathematics – foundationism – logical necessity

Referências Bibliográficas

1. BLOOR, D. *Knowledge and Social Imagery.* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1976.

2. _______. *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1982.

3. _______. "The Living Foundations of Mathematics" In: Social Studies of Science, 1987, Vol. 17.

4. DOUGLAS, M. *Essays on The Sociology of Perception.* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1982.

5. FERNANDES, S. *Foundations of Objective Knowledge.* Dordrecht, Reidel, 1985.