

Movimentos da estrutura a termo da taxa de juros brasileira e imunização*

Gyorgy Varga[§]
Marcos Valli[□]

RESUMO

Este artigo utiliza um modelo de fatores, conhecido como Análise de Componentes Principais -ACP, para avaliar os movimentos da estrutura a termo brasileira. Com os fatores obtidos, aplicamos o procedimento de imunização para o mercado brasileiro de renda fixa e comparamos os resultados com um procedimento conhecido como duration hedge, o qual somente fornece proteção para movimentos paralelos produzidos pela curva de movimentos. A aplicação foi feita com os dados coletados durante a crise da Ásia.

Palavras-chave: estrutura a termo da taxa de juros, preço de títulos, métodos estatísticos e econométricos.

ABSTRACT

This article uses a factor model known as Principal Component Analysis PCA to evaluate the Brazilian local yield curve movements. With the factors obtained we apply a immunization procedure for a local fixed income portfolio and compare this result to a more simple procedure known as duration hedge, which only provides protection for parallel yield curve movements. The application was held with data collected during the Asia crisis.

Key words: term structure of interest rates, asset pricing, statistical and econometric methods.

JEL classification: C49, E43, G12.

* Agradecemos os comentários de Alexandre Barcinski (*University of Chicago*), Guilherme Arcoverde (Banco Central do Brasil) e dois pareceristas anônimos.

§ Professor da FGV-RJ. varga@fce.com.br

□ Doutorado (ABD) em Probabilidade pelo IMPA.

Recebido em abril de 2000. Aceito em setembro de 2000.

Introdução

Neste trabalho é realizada uma avaliação dos movimentos da estrutura a termo (ET) da taxa de juros, por meio de um modelo de fatores conhecido como Análise de Componentes Principais - ACP, que busca explicar os movimentos da ET em um conjunto mínimo de fatores. Aplicando este procedimento à ET brasileira, verificamos que três fatores explicam 94,3% dos movimentos. Ademais, aplicamos um procedimento de eliminação do risco de taxa de juros, conhecido como imunização, baseado nesses três fatores. O resultado obtido foi comparado ao *duration hedge* que é um procedimento muito usado pelos praticantes do mercado.

Uma descrição mais detalhada e aplicações desse tipo de análise à ET podem ser encontradas em Rebonato (1996) e Campbell *et al.* (1997). Sua aplicação ao mercado norte-americano encontra-se em Litterman e Scheinkman (1991) ou, mais detalhadamente, em Knez, Litterman e Scheinkman (1994). Wilson (1994) fornece um resumo de várias aplicações de ACP em diversos países.

A técnica de ACP é uma ferramenta poderosa para a avaliação de risco de instrumentos de renda fixa e variáveis que já está sendo comercializado por várias empresas de consultoria, inclusive no Brasil.¹ Sua aplicação ao Brasil vem sendo cada mais fácil e útil: a) pela estabilidade recente da economia, o que facilita a aplicação de modelos criados para economias com baixa taxa de juros nominal; b) pela determinação do Banco Central do Brasil no sentido de melhor controlar o risco das instituições financeiras nacionais; e c) pelo natural desenvolvimento do mercado financeiro brasileiro. Este é um trabalho pioneiro, que procura mostrar a aplicação desta técnica ao mercado de renda fixa brasileiro.²

Na próxima seção apresentamos a análise de componentes principais; na seção 2, sua aplicação ao mercado brasileiro; na terceira, o procedimento de imunização; na quarta, um exemplo de imunização no mercado brasileiro de renda fixa; na quinta seção, uma comparação com o *duration hedge*; e, por fim, são apresentadas as considerações finais.

¹ Ver as funções e sistemas oferecidos pela FCE em www.fce.com.br, para avaliação de carteiras de renda fixa no mercado brasileiro.

² Esse trabalho foi originalmente apresentado no IV Encontro Brasileiro de Gerência de Risco no Banco Boavista, em maio de 1998.

I Análise de Componentes Principais - ACP

Esta análise se utiliza, essencialmente, de um fato bastante conhecido em matemática, mais especificamente da álgebra linear, chamado de **método de diagonalização de matrizes**. Por meio deste método, e a partir de uma dada **matriz quadrada e simétrica**, obtemos uma segunda matriz quadrada e um vetor, chamados, respectivamente, de matriz de **autovetores** e de vetor dos **autovalores**. Esses três objetos algébricos satisfazem uma relação muito particular que, aliada a conhecidas propriedades algébricas das variáveis de distribuição normal, proporcionam resultados úteis para o estudo da dependência entre uma grande quantidade de variáveis aleatórias normais.

Definimos, inicialmente, a matriz sobre a qual aplicamos o método. Consideremos uma quantidade N (inteiro positivo) fixa de variáveis aleatórias normais:

$$X_1, X_2, \dots, X_N$$

Suponhamos que todas elas possuam média 0 (zero), e que sua matriz de co-variâncias seja representada por:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} & \cdots & \sigma_1 \sigma_N \rho_{1N} \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} & \cdots & \sigma_2 \sigma_N \rho_{2N} \\ \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} & \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} & \sigma_3^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \sigma_{N-1} \sigma_N \rho_{(N-1)N} \\ \sigma_1 \sigma_N \rho_{1N} & \sigma_2 \sigma_N \rho_{2N} & \cdots & \sigma_{N-1} \sigma_N \rho_{(N-1)N} & \sigma_N^2 \end{pmatrix},$$

onde: σ_i^2 e ρ_{ij} são, respectivamente, a variância da i -ésima variável e a correlação entre a i -ésima e a j -ésima variáveis. Observemos que a matriz V é quadrada e simétrica em relação à diagonal composta pelas variâncias.

Nesse caso, o método de diagonalização de matrizes garante a existência de uma matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

e ortonormal, isto é,

$$A' A = I \quad , \quad (1)$$

onde A' é a transposta de A , e I , a matriz-identidade. E também de um vetor:

$$\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N) \text{ com } \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_N$$

Ambos satisfazendo a seguinte relação com a matriz de covariância V :

$$V A = A \Lambda \quad , \quad (2)$$

onde

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda)_{N \times N} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

representa a matriz diagonal associada ao vetor λ . Os vetores a_i da matriz A são os autovetores de V , e os números λ_i são seus autovalores.

Das propriedades (1) e (2) obtemos a igualdade abaixo:

$$V = A \Lambda A' \quad (3)$$

Vale notar que

$$V_{ij} = a_i \Lambda a_j, \quad (4)$$

onde a_i é a i -ésima linha da matriz A , e a_j é a j -ésima coluna de A'

Seja

$$F' = (F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N)$$

um vetor-coluna cujos componentes são variáveis aleatórias normais independentes com média 0 (zero) e variância 1 (um).

Em seguida tomamos o vetor-coluna aleatório

$$\bar{X} = A \Lambda^{1/2} F, \quad (5)$$

onde

$$\Lambda^\alpha = \text{diag} \left(\lambda^\alpha \right)_{N \times N} \quad \forall \alpha \in R$$

Vale notar, novamente, que $X_i = a_i \Lambda^{1/2} F$ e $\text{Cov}(X_i, X_j) = a_i \Lambda a_j'$, exatamente como em (4). Um choque aleatório de um desvio padrão no fator F_l ocasiona uma variação de $\lambda_l^{1/2} a_l$ no vetor X , onde a_l é a l -ésima coluna de A .

Fazendo uso de (3) e (5) e das propriedades algébricas conhecidas das variáveis normais independentes, onde qualquer combinação linear de normais independentes também é normal, obtemos:

$$X \approx \bar{X} \quad \text{e} \quad F = \Lambda^{-1/2} A' \bar{X},$$

onde

$$X' = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N)$$

A variância total pode ser obtida de (4) segundo $\sum_{i=1}^N V_{ii}$, e a variância explicada pelo l -ésimo fator é calculada por λ_l , logo, a explicação proporcionada pelo l -ésimo fator é de:

$$\frac{\lambda_l}{\sum_{i=1}^N V_{ii}}$$

Para definirmos um conjunto mínimo de fatores, tomamos um número (inteiro positivo) $K < N$ tal que o vetor-coluna definido por

$$\tilde{X} = A_K \Lambda_K^{1/2} F_K \tag{6}$$

tenha as variâncias de suas coordenadas satisfazendo

$$\left| \frac{\text{Cov}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) - \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}} \right| < \xi \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

onde

$$F_K = (F_1 \ F_1 \ \dots \ F_K), \quad A_K = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K) \quad e \quad \Lambda_K^{1/2} = \text{diag} \left(\sqrt{\lambda} \right)_{K \times K}$$

para $0 < \xi < 0,05$. Diremos então que as coordenadas de F_K são as **K-componentes principais** das variáveis X com confiança de **95%**.

3 Optamos por trabalhar com taxas implícitas nos *Swaps* porque não há dados suficientes sobre os outros títulos prefixados. As taxas aqui tratadas foram gentilmente fornecidas pela BM&F.

II Aplicação ao Brasil

Na aplicação da ACP para explicar os movimentos da ET da taxa de juros brasileira tomamos as taxas prefixadas implícitas em *Swap*³ com prazo de até um ano. Escolhemos esse instrumento por ser um dos mais líquidos, entre os poucos existentes, no mercado brasileiro.⁴ A amostra compreende o período 2/1/95 a 6/7/99, num total de 1.113 observações. Para cada dia, construímos uma ET com 12 taxas a intervalos de aproximadamente um mês entre cada uma.

A variação de cada uma dessas taxas constitui o vetor aleatório X , sendo esta a variação que tentaremos explicar com um conjunto mínimo de fatores. Tomando simplesmente a variação da taxa implícita em *Swaps* de mesmo prazo podemos estar introduzindo um viés⁵ por superestimar a variância dos retornos, pois se a ET for positivamente (negativamente) inclinada, haverá uma variação positiva (negativa) na taxa implícita no *Swap*, mesmo não havendo nenhuma mudança nas expectativas do mercado. Esse efeito deve ser de pequeno tamanho; por exemplo, tomando-se uma ET positivamente inclinada e linearmente crescente de 20% aa a 25%aa, o viés introduzido na taxa anual para o *Swap* de um mês é de 0,05%, e para a taxa anual de um *Swap* de um ano, é de 0,02%. O procedimento mais apropriado seria tomar a taxa do mesmo *Swap* no dia útil seguinte e descontar essa taxa da taxa de um dia útil (*overnight*), obtendo-se, assim, o excesso de retorno do *Swap* (semelhante ao que é feito em Knez, Litterman e Scheinkman, 1994, p. 1866).

A Tabela 1a apresenta o percentual da variância total explicada por cada fator para cada prazo, onde se pode verificar que os três primeiros fatores explicam 94,3% dos movimentos da estrutura a termo. Tomamos os componentes principais como sendo esses três fatores.

4 Uma alternativa usada por Barcinski (2000) seria o contrato futuro de DI. Ocorre que este instrumento vez por outra não tem nenhum negócio em prazos maiores do que seis meses, enquanto o *Swap* costuma ser muito negociado para prazos até um ano. Também a utilização do futuro de DI demandaria algum tipo de interpolação de taxas, que implica hipóteses adicionais sobre os processos geradores das taxas de juros brasileiras.

5 Devemos essa observação a Alexandre Barcinski.

Tabela 1a
Porcentual da Variância Total Explicada por Cada Fator para Cada Prazo

Prazo (dias úteis)	Variância	Proporção da variância explicada por cada fator			Explicação por três fatores
		1º Fator	2º Fator	3º Fator	
20	2,55	42,74%	34,94%	15,66%	93,33%
41	2,91	56,01%	28,97%	3,74%	88,72%
61	3,26	75,19%	10,96%	4,36%	90,51%
82	2,81	80,25%	6,86%	7,59%	94,70%
102	2,70	79,51%	4,17%	9,99%	93,67%
123	2,89	92,51%	3,84%	0,07%	96,42%
143	2,93	91,27%	5,00%	0,09%	96,36%
163	3,06	86,62%	4,69%	0,38%	91,69%
184	2,68	92,35%	3,95%	0,37%	96,67%
204	2,83	91,42%	5,75%	0,41%	97,58%
225	2,86	90,72%	5,95%	0,29%	96,97%
245	2,83	89,08%	5,47%	0,37%	94,92%
Média		80,64%	10,05%	3,61%	94,30%

Nota: Mostramos aqui quanto cada fator explica da variância total da ET. A primeira coluna mostra o prazo em dias úteis. A segunda coluna mostra a variância total da taxa de juros para cada prazo. A terceira, quarta e quinta colunas fornecem a explicação segundo cada fator. Na última coluna, vê-se o porcentual da variância explicada pelo total dos três primeiros fatores.

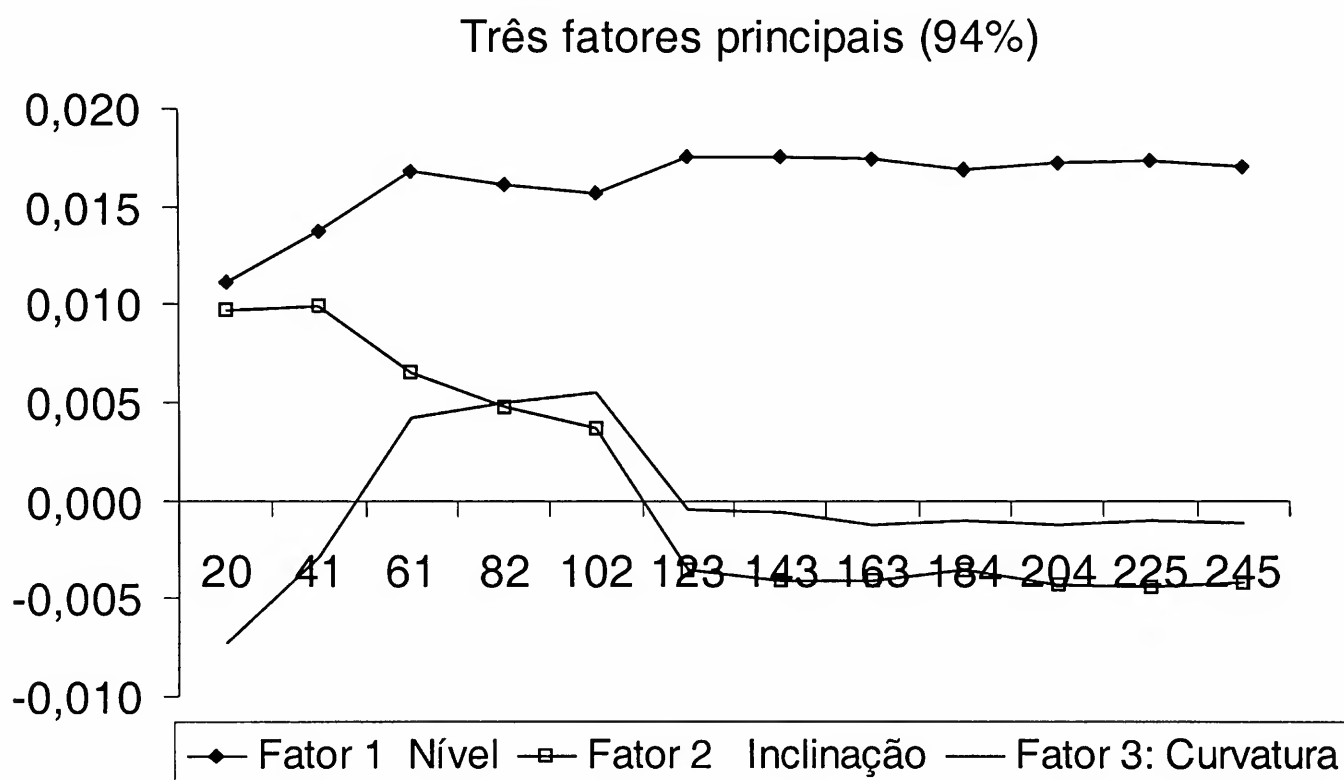
Os três primeiros autovetores que traduzem o impacto dos três primeiros fatores são mostrados na Tabela 1b.

Tabela 1b
Três Primeiros Autovetores

a_1	a_2	a_3
0,1981	(0,5123)	0,5789
0,2425	(0,4989)	0,3027
0,2973	(0,3246)	(0,3457)
0,2849	(0,2383)	(0,4231)
0,2783	(0,1823)	(0,4763)
0,3104	0,1810	0,0399
0,3102	0,2077	0,0481
0,3091	0,2057	0,0993
0,2987	0,1767	0,0917
0,3054	0,2191	0,0992
0,3056	0,2239	0,0840
0,3016	0,2138	0,0939

É fácil interpretar o significado de cada fator, verificando seu efeito sobre toda a ET. No Gráfico 1, verificamos que choques aleatórios no fator 1 ocasionam movimentos paralelos da ET; logo, podemos dizer que o primeiro fator reflete movimentos **paralelos** na ET. O segundo fator, quando sofre um choque positivo, leva à diminuição na taxa de curto prazo e aumento na de longo prazo, implicando, assim, mudança na **inclinação** da ET. O terceiro fator, quando sofre choque positivo, leva a um aumento nas taxas curtas e longas e a uma diminuição na taxa intermediária, representando, assim, um movimento na **curvatura** da ET.

Gráfico 1
Perfil dos Três Primeiros Fatores



Nota: São os três primeiros autovetores distribuídos segundo o prazo.

Quando dividimos a amostra em duas partes iguais verificamos que os três primeiros fatores têm um poder de explicação maior na segunda metade da amostra (Tabela 2), talvez associado a maior estabilidade econômica.

Tabela 2
Explicação por Fator

Fator	1ª. metade		2ª. metade	
	por fator	Acumulada	por fator	acumulada
1	78,8%	78,8%	91,2%	91,2%
2	9,7%	88,5%	6,3%	97,5%
3	3,7%	92,2%	1,0%	98,5%
4	2,3%	94,4%	0,5%	99,0%
5	1,9%	96,3%	0,3%	99,3%
6	1,6%	97,9%	0,2%	99,5%
7	0,8%	98,7%	0,2%	99,7%
8	0,5%	99,2%	0,1%	99,8%
9	0,4%	99,6%	0,1%	99,9%
10	0,2%	99,8%	0,0%	100,0%
11	0,1%	99,9%	0,0%	100,0%
12	0,1%	100,0%	0,0%	100,0%

O resultado aqui apresentado é muito próximo ao obtido por Litterman e Scheinkman (1991) para o mercado norte-americano. Para uma amostra de taxas mensais com dados de 1984 a 1988, os autores verificaram que os três primeiros fatores explicam 88,0%, 8,4% e 2% da variância total da ET, respectivamente. É importante frisar que, apesar de ser uma amostra mensal, o prazo das taxas usadas por Litterman e Scheinkman atinge 30 anos; desse modo, embora os movimentos da ET no Brasil tenham direções parecidas, a ET é bem distinta, especialmente no tocante ao prazo das aplicações. Outra distinção importante entre esses dois mercados, não avaliada neste estudo, é o nível de volatilidade das taxas.

III Imunização da carteira

Imunização consiste em adicionar uma carteira de títulos à carteira corrente, de forma a eliminar o efeito de variações da taxa de juros sobre o valor da carteira original (veja Bierwag, 1977). Nesta seção, descreveremos como fazer a imunização em relação a cada um dos fatores tomando como exemplo uma carteira de *zero coupon*.⁶ Uma aplicação para o mercado norte-americano pode ser encontrada em Barber e Copper (1996), e outra, muito mais detalhada, e recentemente aplicada ao mercado brasileiro, encontra-se em Barcinski (2000).

6 São títulos prefixados sem nenhum pagamento de juros, mas apenas o pagamento do principal no vencimento.

Representamos uma carteira de títulos do tipo *zero coupon*, pelos seus prazos de vencimento, no vetor:

$$\mathbf{T} = (T_1 T_2 \cdots T_N),$$

onde T_i representa o i -ésimo prazo (em ordem crescente), e o vetor

$$\mathbf{r} = (r_1 r_2 \cdots r_N)$$

representa o conjunto das taxas contínuas⁷ médias para cada vencimento. Assim, o preço de um título que paga o valor 1 (um) fixo no final do i -ésimo prazo tem seu valor presente dado por:

$$P_i = e^{-r_i T_i},$$

onde P_i representa o preço do título com vencimento em T_i .

Consideremos, de fato, uma variação qualquer na estrutura a termo, representada aqui pelo vetor-coluna

$$\Delta \mathbf{r}' = (\Delta r_1 \Delta r_2 \cdots \Delta r_N)$$

e uma carteira de *zero coupon*

$$\mathbf{P} = (P_1 P_2 \cdots P_N).$$

Para todo i fixo sabemos, pela expansão em série de Taylor da função exponencial, que

$$\frac{\partial P_i}{\partial r_i} = -T_i \cdot P_i$$

7 Se R_i denota a taxa efetiva para o i -ésimo prazo, temos que ter $r_i = \frac{1}{T_i} \ln(1+R_i)$. Esse formato especial de expressar as taxas é bastante vantajoso, pois simplifica as expressões quando analisamos o retorno gerado por um determinado movimento na estrutura a termo. Para mais detalhes sobre taxas de juros, veja Faro (1990).

representa a aproximação linear⁸ para a variação na quantia investida P_i como consequência de uma variação de uma unidade na taxa r_i . Portanto, como o valor da carteira é dado por

$$V(P) = \sum_{i=1}^N P_i,$$

a aproximação (de primeira ordem) na variação $V(P)$ provocada pelo movimento $D\mathbf{r}$ na estrutura a termo é dada por

$$D_P^{\Delta r} = D_P \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (7)$$

onde

$$D_P = -(T_1 P_1 \quad T_2 P_2 \cdots T_N P_N).$$

Suponhamos que as variações nas taxas tenham distribuição normal, como as coordenadas do vetor \mathbf{X} da seção anterior sobre componentes principais.

Da fórmula (5), a j -ésima ($1 \leq j \leq N$) coluna da matriz

$$A \Lambda^{1/2}$$

representa, em nossa aplicação, a variação nas taxas para um desvio padrão no j -ésimo fator. Denotaremos tal vetor-coluna por

$$\Delta \mathbf{r}^j = (\Delta r_1^j \quad \Delta r_2^j \quad \dots \quad \Delta r_N^j)^T$$

Seja T_L ($1 \leq L \leq N$) um determinado prazo (por exemplo, o prazo de maior liquidez). Vamos supor que se queira saber quanto investir em contratos com esse prazo para imunizarmos a carteira resultante em relação ao j -ésimo fator. Pela fórmula (7), basta investirmos a quantia

$$Q_L = \frac{D_P^{\Delta r^j}}{T_L \Delta r_L^j}$$

8 Esse é o coeficiente de primeira ordem; o efeito de segunda ordem é conhecido como convexidade. Ver Varga (1993).

$$\begin{pmatrix} T_{L_1} \Delta r_{L_1}^1 & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^1 & \cdots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^1 \\ T_{L_1} \Delta r_{L_1}^2 & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^2 & \cdots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{L_1} \Delta r_{L_1}^K & T_{L_2} \Delta r_{L_2}^K & \cdots & T_{L_K} \Delta r_{L_K}^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{L_1}^{1/2} & & & \\ & \lambda_{L_2}^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{L_K}^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{L_1,1} & a_{L_2,1} & \cdots & a_{L_K,1} \\ a_{L_1,2} & a_{L_2,2} & \cdots & a_{L_K,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{L_1,K} & a_{L_2,K} & & a_{L_K,K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{L_1} & & & \\ & T_{L_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{L_K} \end{pmatrix}$$

Portanto, visto que as matrizes diagonais acima possuem obviamente determinante não-nulo, basta que a matriz entre as duas matrizes diagonais tenha determinante não-nulo para que o sistema que nos interessa tenha solução.

Sabemos, novamente por um resultado de álgebra linear, que, fixado K , o determinante da matriz A (vale para qualquer matriz) pode ser escrito como uma combinação linear de determinantes de todas as submatrizes quadradas $K \times K$ da matriz A_K - matriz das primeiras K colunas de A (como na seção componentes principais). Portanto, se todas essas submatrizes tivessem seus determinantes nulos, o determinante da matriz A seria, por consequência, também nulo, o que obviamente não ocorre, pois A é ortonormal, logo, seu determinante é igual a 1 (um).

Mediante esses argumentos, podemos então garantir a existência de uma carteira composta de K prazos que imuniza a carteira inicial P em relação aos K fatores. Se isso acontecer para os K prazos de maior liquidez (cada prazo está associado a uma linha), estaremos obviamente em melhor situação. Denotando uma tal submatriz com determinante não-nulo por $A_{L,K}$, sabemos então que existe sua matriz inversa associada e concluímos que a solução do nosso problema pode ser obtida por

$$Q_L = \text{diag}(T_K)^{-1} A_{L,K}^{-1} \text{diag}(\lambda)^{-1/2} D_{P,K}^{\Delta r} \quad (9)$$

onde

$$D_{P,K}^{\Delta r} = \begin{pmatrix} D_P^{\Delta r^1} & D_P^{\Delta r^2} & \cdots & D_P^{\Delta r^K} \end{pmatrix}$$

Obtivemos, como havíamos proposto, um procedimento para fazer a imunização (aproximação de primeira ordem) de nossa carteira inicial P em relação aos fatores principais independentes que influenciam o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros. Esse

consiste em incorporar a carteira Q_K à carteira inicial P , e por (8) garantimos que a carteira resultante se torna imune aos K fatores.

No entanto, essa carteira tem o inconveniente de poder custar caro. Podemos contornar esse problema acrescentando mais um prazo (título) aos K previamente fixados. Substituindo a última equação por

$$Q_{L_1} + Q_{L_2} + \dots + Q_{L_{K+1}} = 0 ,$$

impomos custo zero à carteira de imunização. Não é garantida a solução do sistema; nesse caso, as chances aumentam bastante se adicionarmos graus de liberdade (prazos) extras. Porém, se não quisermos assim proceder, poderemos ainda tentar encontrar soluções para as K equações com $K+1$ incógnitas com menor custo possível, aproveitando os graus de liberdade do sistema.

Por sorte, no caso da estrutura a termo brasileira, por meio da série estudada, vimos que essa possui três fatores principais independentes que explicam mais de 94% das variâncias. Então, podemos montar o problema de imunização em relação a esses três fatores investigando quatro prazos de maior liquidez e que possuem menor correlação entre si. A menor correlação certamente será obtida se estes prazos forem o mais distante possível um do outro; portanto, temos que identificar quatro prazos de razoável liquidez que estejam mais ou menos equidistantes entre si e cujo sistema associado (imune a três fatores e com custo zero) tenha solução, isto é, o determinante da matriz 4×4 dos coeficientes do sistema tem que ser não-nulo. Se isso não ocorrer para nenhum grupo de quatro prazos, podemos, ao invés de impor custo zero, tentar encontrar a carteira (com quatro prazos) mais barata e imune a três fatores, lembrando que, como provamos no parágrafo anterior, sempre é possível encontrar quatro prazos onde o sistema (imune a quatro fatores) associado tem solução. Solucionando então o sistema de quatro equações lineares associado (a quarta equação é a do custo zero), encontramos a carteira de imunização com custo zero. Essa depende dos quatro vencimentos, ao contrário da carteira inicialmente fixada, que pode ser composta, por exemplo, de contratos com vencimentos nos doze prazos levantados na série estudada.

IV Um exemplo de imunização

Apenas com a intenção de exemplificar o uso do ACP no Brasil, aplicamos o resultado da seção anterior a uma carteira fictícia de títulos prefixados, todos com valor final \$1.000.

Tomamos a ET por 10 dias, no período ao redor da crise da Ásia. Nas Tabelas 3 e 4, apresentamos a ET.

Tabela 3
ET com Prazo de Até 102 Dias Úteis

Data	1	20	41	61	82	102
28/Out/97	19,28%	24,98%	25,72%	26,90%	27,41%	27,12%
29/Out/97	19,99%	27,92%	28,72%	31,82%	31,97%	31,84%
30/Out/97	47,37%	34,07%	33,68%	34,65%	34,61%	34,45%
31/Out/97	44,68%	43,54%	40,75%	38,68%	38,48%	37,29%
3/Nov/97	44,68%	43,61%	40,51%	39,01%	37,85%	36,15%
4/Nov/97	44,56%	41,44%	38,22%	36,75%	35,56%	34,06%
5/Nov/97	45,04%	42,59%	38,91%	37,13%	36,17%	35,30%
6/Nov/97	45,28%	43,15%	40,44%	38,79%	37,94%	37,28%
7/Nov/97	45,28%	50,36%	48,70%	48,09%	47,06%	45,14%
10/Nov/97	45,28%	47,53%	46,03%	46,06%	44,47%	43,51%
11/Nov/97	45,28%	45,10%	43,68%	43,21%	42,28%	42,14%

Nota: Cada coluna se refere à taxa efetiva anual para o prazo (em dias úteis) colocado na primeira linha. Cada linha contém as taxas efetivas obtidas nos dias descritos na primeira coluna.

Tabela 4
Continuação da Tabela 3, para Taxas com Prazo de 123 a 245 Dias Úteis

Data	123	143	163	184	204	225	245
28/Out/97	28,11%	28,27%	28,33%	28,44%	28,41%	28,43%	28,60%
29/Out/97	32,44%	32,55%	32,64%	32,86%	32,77%	32,81%	33,07%
30/Out/97	34,89%	34,61%	34,73%	34,46%	34,10%	34,01%	34,18%
31/Out/97	37,29%	36,61%	36,54%	35,95%	35,42%	35,41%	35,30%
3/Nov/97	36,82%	35,80%	35,10%	34,35%	34,06%	33,79%	33,75%
4/Nov/97	34,89%	34,02%	33,53%	33,21%	32,86%	32,61%	32,71%
5/Nov/97	35,89%	35,20%	34,94%	34,89%	34,59%	34,46%	34,68%
6/Nov/97	37,81%	37,11%	37,22%	36,91%	36,52%	36,39%	36,70%
7/Nov/97	45,28%	44,16%	44,20%	43,57%	42,99%	43,04%	43,09%
10/Nov/97	43,01%	42,37%	41,97%	41,41%	41,52%	41,25%	41,29%
11/Nov/97	41,99%	41,01%	40,46%	40,12%	39,87%	39,45%	39,61%

Criamos uma carteira arbitrária com posições, em títulos do tipo *zero coupon*, compradas por prazo longo e vendidas (caso que se trata de uma captação de recursos) em prazo curto, segundo as quantidades listadas na Tabela 5. Essa tabela também descreve o valor de cada título na data inicial.

Tabela 5
Composição e Valor da Carteira Fictícia

Prazo	Quantidade	Valor
1	Dinheiro	(65.020,50)
20	-10	(9.824,61)
41	-30	(28.903,17)
61	40	37.758,66
82	30	27.725,87
102	10	9.074,40
123	5	4.430,53
143	5	4.341,20
163	5	4.255,03
184	5	4.164,91
204	5	4.083,67
225	5	3.998,85
245	5	3.915,16
	Total	(0)

Nota - A última coluna contém o valor corrente dos títulos que compõem a carteira, segundo o prazo dos títulos.

Na Tabela 6 consta o valor diário dessa carteira corrigido pela taxa de juros corrente, que varia a cada dia de acordo com a ET das Tabelas 3 e 4.

Tabela 6
Valor Corrente da Carteira Fictícia, de acordo com a ET de Cada Dia

Data	Carteira	
	Variação corrigida	Valor
28/Out./97		65.020,50
29/Out./97	(1.335)	63.732,23
30/Out./97	(495)	63.335,52
31/Out./97	(550)	62.878,00
3/Nov./97	220	63.190,23
4/Nov./97	436	63.719,16
5/Nov./97	(327)	63.486,31
6/Nov./97	(516)	63.064,65
7/Nov./97	(1.895)	61.263,00
10/Nov./97	456	61.809,39
11/Nov./97	431	62.332,17

Nota: A última coluna mostra o valor da carteira e a segunda coluna a variação do valor da carteira.

A imunização consiste em adquirir uma carteira cuja variação em valor seja exatamente igual à variação do valor da carteira a ser imunizada. A carteira escolhida para esse fim foi obtida a partir de três títulos (o motivo para escolher determinado título pode ser sua liquidez). A Tabela 7 contém o valor que deve ser aplicado em cada título e o valor dessa carteira a cada dia. O valor aplicado em cada título é obtido da fórmula 9, e os parâmetros foram calculados com base numa amostra da ET do ano anterior (últimos 252 dias úteis) à avaliação da imunização.

Tabela 7
Comportamento da Carteira de Imunização com Três Fatores

Carteira de hedge com três fatores										
Data	Variação	Acumulado	Valor	Venda			Valor	Compra		
			Corrente	41	82	184	Total	41	82	184
28/10/97							(64.281)	33.211	(67.726)	(29.766)
29/10/97	1.406	1.406	(62.922)	33.087	(66.965)	(29.043)	(62.875)	32.127	(66.112)	(28.890)
30/10/97	572	1.980	(62.400)	31.939	(65.698)	(28.642)	(62.317)	31.048	(64.833)	(28.532)
31/10/97	650	2.633	(61.758)	30.807	(64.259)	(28.307)	(61.698)	29.940	(63.451)	(28.187)
03/11/97	(232)	2.405	(62.020)	29.947	(63.541)	(28.426)	(61.809)	29.127	(62.634)	(28.302)
04/11/97	(334)	2.075	(62.234)	29.196	(62.955)	(28.474)	(62.106)	28.337	(62.046)	(28.397)
05/11/97	406	2.484	(61.792)	28.317	(61.962)	(28.147)	(61.707)	27.392	(61.080)	(28.019)
06/11/97	577	3.065	(61.221)	27.352	(60.845)	(27.728)	(61.151)	26.436	(59.985)	(27.603)
07/11/97	1.911	4.980	(59.331)	26.239	(58.868)	(26.702)	(59.385)	25.281	(58.125)	(26.541)
10/11/97	(434)	4.554	(59.907)	25.339	(58.425)	(26.821)	(59.704)	24.492	(57.498)	(26.698)
11/11/97	(283)	4.277	(60.076)	24.541	(57.749)	(26.868)	(59.996)	23.673	(56.856)	(26.813)

Nota: A carteira tem os títulos com prazo de 41, 82 e 184 dias úteis. As quatro últimas colunas mostram o valor diário de aquisição dessa carteira. Da terceira à sexta coluna, temos o valor de venda dessa carteira. Na segunda coluna temos o ganho ou perda proporcionado por essa carteira a cada dia.

Comparando-se a segunda coluna da Tabela 6 e a primeira da Tabela 7 é fácil verificar a qualidade da imunização com modelos de fatores. Na seção a seguir comparamos este procedimento com outro bastante utilizado pelos praticantes do mercado.

V Comparação com *duration hedge*

Um caso particular da seção anterior consiste em considerar apenas movimentos paralelos nas taxas, isto é,

$$\Delta r_1 = \Delta r_2 = \dots = \Delta r_N,$$

e, nesse caso, para que uma carteira P seja imune a esse tipo particular de movimento, basta que

$$D_P = -\sum_{i=1}^N T_i \cdot P_i = 0, \quad (10)$$

em particular, se $N = 2$, temos que ter

$$P_1 = -\frac{T_2 \cdot P_2}{T_1}$$

Se a ET sofresse apenas movimentos paralelos, a imunização com apenas um título traria o mesmo resultado que a aplicação com mais de um título. Como exemplo, imunizando a carteira inicial apenas com o título de 41 dias de prazo, a quantidade adquirida é dada pela fórmula (10), e o resultado encontra-se na Tabela 8.

Tabela 8
Comportamento da Carteira de *Hedge* com Apenas um Título (*duration hedge*)

Duration hedge com título de 41 dias úteis				
Data	Variação	Acumulado	Carteira	
			venda	compra
28/10/97				(230.209)
29/10/97	817	817	(229.558)	(229.900)
30/10/97	1.466	2.284	(228.788)	(232.679)
31/10/97	1.876	4.164	(231.144)	(235.481)
03/11/97	(34)	4.136	(235.860)	(241.604)
04/11/97	(542)	3.600	(242.500)	(248.440)
05/11/97	220	3.825	(248.587)	(252.515)
06/11/97	420	4.251	(252.469)	(256.336)
07/11/97	1.948	6.205	(254.768)	(255.214)
10/11/97	(613)	5.601	(256.206)	(263.587)
11/11/97	(533)	5.077	(264.510)	(272.248)

Nota: A carteira tem o título com prazo de 41 dias úteis. A última coluna mostra o valor diário de aquisição dessa carteira. A quarta coluna mostra o valor de venda dessa carteira. Na segunda coluna consta o ganho ou perda diária proporcionado por essa carteira.

Pela terceira coluna da Tabela 8 verificamos que a variação dessa carteira de *hedge* não compensa tão bem as variações na carteira a ser imunizada quanto a carteira obtida com três fatores. De fato, esse é o resultado esperado, uma vez que o *duration hedge* protege apenas para variações paralelas na ET.

Tabela 9
Comparação entre a Imunização com Três Fatores e *Duration* (um fator)

Data	Variação diária 3 fatores	<i>Duration</i>
29/Out.97	70	(518)
30/Out./97	78	971
31/Out./97	100	1,326
03/Nov./97	(12)	186
04/Nov./97	102	(106)
05/Nov./97	79	(107)
06/Nov./97	61	(96)
07/Nov./97	16	53
10/Nov./97	22	(158)
11/Nov./97	148	(102)
Média	66	145
DP	47	564

Nota: A segunda e terceira trazem a variação diária do valor carteira original mais a carteira de imunização.

Pela última linha da Tabela 9 vemos que o desvio padrão da carteira protegida pelo *duration hedge* é três vezes maior do que o da carteira com *hedge* por três fatores. Fica, assim, óbvia a superioridade da utilização de um número maior de fatores na proteção de carteiras de renda fixa. De fato, se os três fatores explicam uma parcela da volatilidade maior do que o primeiro fator, segue-se que o *hedge* é tanto melhor quanto maior o número de fatores protegidos.

VI Considerações finais

Verificamos que o comportamento da ET brasileira é muito próximo daquele obtido para o mercado norte-americano, onde movimentos paralelos da ET são os dominantes. Mostramos aqui a praticidade e a qualidade do procedimento de análise de componentes principais, na avaliação da ET brasileira, bem como sua utilidade para proteger uma carteira de títulos

prefixados de variações da taxa de juros quando comparada com o *duration hedge*.

Vale destacar a importância desse resultado para a gerência de risco de títulos de renda fixa, que pode melhor avaliar e proteger carteiras dos riscos gerados pelos diversos tipos de movimentos da ET.

Aplicações práticas de gerência de risco, como o cálculo do VAR, podem ser facilmente obtidas com os procedimentos aqui descritos (veja Singh, 1997).

Referências bibliográficas

Barber, J., Copper, M. Immunization using principal component analysis. *Journal of Portfolio Management*, p. 99-105, Fall, 1996.

Barcinski, Alexandre. *Hedging strategies using a multifactor model for the Brazilian interest rate*. 2000. Mimeografado.

Bierwag, G. Immunization, duration, and the term structure of interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 12, p. 725-742, 1977.

Campbell, J; Lo, A., MacKinlay, A. *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, 1997

Faro, Clóvis de. *Princípios e aplicações do cálculo financeiro*. Livros Técnicos e Científicos Editora, 1990.

Knez, Peter; Litterman, Robert; Scheinkman, José. Exploration into factors explaining money market returns. *Journal of Finance*, december 1994.

Litterman, Robert; Scheinkman, José. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, v. 1, p. 54-61, 1991.

Rebonato, Riccardo. *Interest-rate option models*. Wiley, 1996.

Singh, Manoj. Value at risk using principal components analysis. *Journal of Portfolio Management*, p. 101-112, Fall 1997

Varga, Gyorgy. Duração, convexidade e imunização. *Resenha da BM&F*, setembro 1993.

Wilson, T. Debunking the myths. *Risk*, 7, abril 1994.

