

Um Algoritmo Numérico para o Cálculo dos Estados Estacionários e da Dinâmica de Transição em Modelos de Gerações Superpostas

Roberto de Goes Ellery Junior

Diretoria de Estudos Macroeconômicos do Instituto
de Pesquisa Econômica Aplicada, DIMAC/IPEA
Universidade Católica de Brasília e DIMAC/IPEA

Rogério Boueri Miranda

RESUMO

O artigo apresenta um algoritmo para a resolução de modelos de gerações superpostas com muitas gerações. Uma particularidade do algoritmo apresentado é que este não se limita a encontrar os estados estacionários associados a determinados valores dos parâmetros ou a algumas hipóteses de política econômica. Isto faz com que este algoritmo seja de grande utilidade para estudar situações onde a trajetória para o estado estacionário possa ser determinante na adoção de uma determinada política, caso particular do problema do financiamento da previdência. Também é apresentado um exemplo de aplicação do algoritmo para simular a transição de um sistema previdenciário do tipo repartição para um do tipo capitalização.

PALAVRAS-CHAVE

gerações superpostas, análise numérica, finanças públicas

ABSTRACT

This paper provides an algorithm to deal with overlapping generations model with too many generations. A feature of the algorithm is that it simulates all the trajectory of the economy, rather than particular steady states associated with some values to the parameters or police hypothesis, e.g. how to finance social insurance. An example is presented to show how the algorithm works simulating the transition from a PAYGO to a fully funded social security system.

KEY WORDS

overlapping generations, numerical analysis, public finances

JEL Classification

C61, C63, C68, H31

INTRODUÇÃO

Modelos de gerações superpostas têm sido muito utilizados para estudar problemas em economia, que vão desde política monetária até crescimento econômico. Uma vantagem desses modelos é que estes permitem estudar o comportamento dos indivíduos durante o ciclo de vida, além de contarem com uma forma natural de heterogeneidade, qual seja, a idade.

Dessa forma, esses modelos são de substancial utilidade para problemas que envolvam distribuição de renda entre gerações, como, por exemplo, a questão da previdência ou do financiamento da dívida pública. Por delimitar bem o ciclo de vida, também são usados para explicar por que os indivíduos escolhem certo nível de capital humano ou seguem determinadas carreiras como em Krussel e Ríos-Riull (1992).

Outro elemento que torna modelos de gerações superpostas interessantes para a análise de políticas econômicas é o fato de existir a possibilidade do Primeiro Teorema do Bem-Estar Social não ser válido. Isso implica dizer que o equilíbrio de mercado nem sempre é Pareto ótimo, o que dá margens para políticas econômicas efetivas.

Um dos grandes problemas associados a esses modelos é a sua intratabilidade. Modelos com mais de três gerações não possuem, em geral, soluções analíticas, o que faz com que tenham sido pouco utilizados para fins aplicados. Dessa forma, modelos de gerações superpostas são geralmente utilizados apenas para apresentar alguns exemplos em equilíbrio geral.

Recentemente, com a evolução dos computadores e a difusão de técnicas de simulação e análise numérica em modelos macroeconômicos, esse problema vem sendo resolvido. Existem vários exemplos de modelos com grande número de gerações sendo utilizados para analisar problemas de política fiscal, em particular a questão do financiamento da previdência.

Essa tendência é consistente com os rumos que a análise macroeconômica vem tomando recentemente, qual seja, tornar-se um ramo de equilíbrio geral aplicado. Dessa forma, problemas típicos de macroeconomia, como demanda por moeda, consumo e crescimento econômico, vêm recebendo tratamento de modelos de equilíbrio geral, quer com modelos com horizonte infinito, na linha de Cass-Koopmans, quer com modelos do tipo aqui discutido, ou mesmo modelos mais simples. Isso leva a simulação de modelos de equilíbrio geral a tornar-se comum na análise macroeconômica.

No caso de modelos de gerações superpostas, é possível resolver o modelo por meio da solução do sistema de equações não-lineares formado pelas condições de primeira ordem dos problemas das firmas e dos consumidores, ou por meio de técnicas de programação dinâmica, utilizando-se da função valor. Na primeira linha está o método proposto em Auerbach e Kotlikoff (1987). Aplicações, para o Brasil, utilizando-se deste método podem ser encontradas em Barreto e Oliveira (2001) e em Lanes Jr. (1999). Uma descrição do algoritmo que faz uso de programação dinâmica pode ser encontrada em Imrohoroglu, Imrohoroglu e Jones (1999), e aplicações deste método para a análise dos efeitos de bem-estar para a previdência social no Brasil pode ser encontrada em Ellery Jr. e Bugarin (2001).

Este artigo apresenta um algoritmo para resolver modelos de gerações superpostas com muitas gerações que segue a linha proposta em Auerbach e Kotlikoff (1987), e cujo método consiste em uma generalização do utilizado em Miranda (1997), no sentido de que pode ser utilizado para a solução numérica e simulação de modelos com muitas gerações. Na seção 1 é apresentado o modelo em suas linhas gerais, na segunda discute-se o algoritmo para resolvê-lo, na terceira apresenta-se um exemplo de aplicação do algoritmo para resolver um modelo de trinta gerações com herança, enquanto na última seção apresentam-se algumas conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

1. O MODELO

O modelo será discutido em sua versão mais simples, na qual os indivíduos escolhem entre poupança e consumo e as firmas decidem o quanto empregar de capital e trabalho. Formalmente, o problema dos indivíduos, escrito com as variáveis em unidades de eficiência, é:

$$\begin{aligned} & \underset{\{c_t\}_{t=1}^T}{Max} \quad \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} U(c_t^g) \\ & t.q. \quad c_1^g = w_1 - (1+x)a_2^g \\ & \quad c_t^g = w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 2, \dots, T-1 \\ & \quad c_T^g = w_T + (1+r_T)a_T^g \end{aligned}$$

Onde g representa a geração do indivíduo, t o tempo, w o salário, a é a quantidade de ativos que o indivíduo possui, r a remuneração do capital, c a quantidade consumida, x a taxa de crescimento da produtividade do trabalho e β a taxa de desconto. Note-se que, com simples variações nas restrições orçamentárias, se pode adaptar o modelo para explicar previdência, demanda por moeda, política fiscal, ou mesmo heranças.

Por exemplo, é possível modificar o modelo para considerar o motivo herança absoluta, como em Martins (1995). Neste caso, a primeira restrição assumiria a seguinte forma:

$$c_1^g = w_1 + \frac{b}{(1+n)^{T-1}} - (1+x)a_2^g$$

e a última seria escrita como:

$$c_T^g = w_T + (1+r_T)a_T^g - b$$

Onde b é a quantidade deixada como herança e n a taxa de crescimento da população. Dessa forma seria considerado que o indivíduo deixa uma

herança b , que é retirada da sua renda no seu último período de vida e distribuída entre seus herdeiros. O custo dessa sofisticação do modelo é de apenas uma equação a mais nas condições de primeira ordem.

Outra alteração interessante seria colocar previdência do tipo repartição simples. Neste caso, bastaria diminuir o salário por meio de um imposto no período de atividade e substituir o salário pelo valor da aposentadoria nos períodos inativos.

As firmas maximizam lucros dados preços dos fatores, ou seja:

$$\underset{K,L}{Max} F(K, AL) - rK - wL$$

Um equilíbrio para esta economia é uma cesta de consumo e uma alocação entre capital e trabalho onde firmas maximizam lucros, indivíduos maximizam utilidade e os mercados se equilibram.

É claro que podemos solucionar o problema trocando a variável de escolha pela poupança e substituindo as restrições orçamentárias na função de utilidade.¹ Dessa maneira, pode-se resolver o problema de forma recursiva, e diminui-se pela metade o número de equações nas condições de primeira ordem. Isso ocorre porque, resolvendo recursivamente, eliminam-se os multiplicadores de Lagrange associados às restrições orçamentárias.

2. DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

Esta seção irá descrever o método proposto para resolver modelos de gerações superpostas. Nela serão discutidos não apenas problemas específicos à resolução desses modelos, como também questões ligadas a

1 Note-se que isso é normalmente feito na literatura sobre crescimento com horizonte infinito, em que a variável de controle é investimento, e não consumo.

métodos numéricos que se relacionem diretamente com o algoritmo em questão.

De início serão feitos pequenos comentários sobre a conveniência de utilizar técnicas numéricas para aproximar derivadas. Também serão feitos comentários sobre a resolução de sistemas de equações não-lineares, que consiste em um dos pontos críticos do método proposto.² Finalmente será feita a exposição do algoritmo.

A melhor maneira de resolver um modelo de gerações superpostas depende do número de gerações existentes nos modelos. Se o número de gerações for menor ou igual a três, esse modelo pode ser resolvido analiticamente. Para o caso de duas gerações a solução é trivial. Com mais de três gerações torna-se necessária a utilização de métodos numéricos para resolver o problema.

Neste caso, o primeiro passo é encontrar as condições de primeira ordem. Dado que este problema é razoavelmente fácil de resolver analiticamente, é aconselhável que seja feito dessa forma. Note-se que embora seja fácil de resolver numericamente, achar derivadas deve ser feito, sempre que possível, analiticamente, uma vez que qualquer algoritmo desta natureza está sujeito a erros de aproximação e arredondamento.

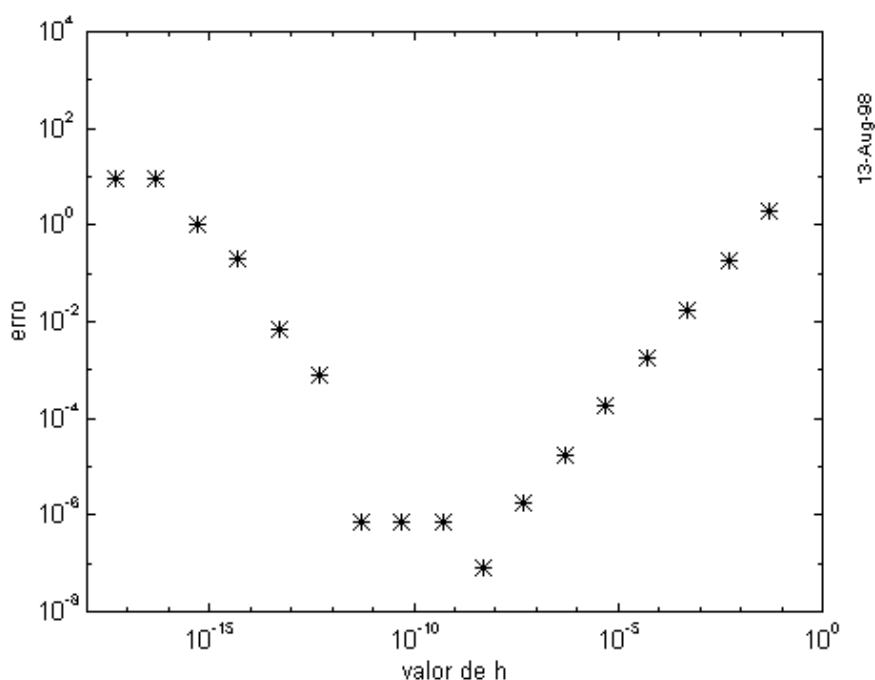
O exemplo abaixo mostra este efeito para um caso bem simples. Considere a função x^9 e uma tentativa de aproximar sua derivada pela definição, dada pela expressão:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

2 Na realidade, resolver as condições de primeira ordem consiste em resolver um sistema de equações não-lineares. Este problema poderia ser evitado se fossem consideradas utilidades quadráticas; neste caso, as condições de primeira ordem seriam lineares, retirando uma das maiores dificuldades do método. Voltaremos a este ponto mais adiante.

Note-se que, a princípio, tem-se a impressão de que a aproximação será mais precisa para menores valores de h . Esse resultado não se observa porque à medida que h vai diminuindo, os erros de arredondamento vão se tornando cada vez mais expressivos, levando a uma piora na aproximação da derivada.

FIGURA 1



Observando a Figura 1, fica claro que os valores do erro são muito grandes tanto para baixos como para altos valores de h . Como não valeria a pena colocar uma rotina adicional para procurar valores ótimos para h , e dada a facilidade de se encontrar as condições de primeira ordem, mesmo para modelos com muitas gerações, sugere-se que estas sejam fornecidas ao algoritmo.

Encontradas as condições de primeira ordem, devemos achar o vetor de poupanças que as resolve.³ Este é um dos pontos cruciais do método de

3 Como o número de gerações é finito, a solução será um vetor do R^T .

solução, uma vez que encontrar este vetor corresponde a encontrar a solução de um sistema não-linear com um número de equações igual ao número de variáveis de controle. Neste caso, o número de gerações menos um, visto que ninguém poupa no último período de vida. Note-se que se a variável de controle fosse o consumo, existiriam as equações relacionadas aos multiplicadores de Lagrange, o que aumentaria consideravelmente o tamanho do problema.

O problema para resolver esse tipo de sistema está no fato de que, em geral, não se sabe se existe solução, se esta é única, ou mesmo se o número de soluções, caso exista alguma, é finito. Dessa forma, não existe um método geral de solução para esses problemas. É necessário que seja escolhido um de acordo com o caso apresentado.

Para resolver esse sistema, é sugerido um dos métodos do tipo quase-Newton. Estes consistem numa variação do método de Newton, em que a matriz Jacobiana não é fornecida ao algoritmo. Neste caso, vale a pena aproximar as derivadas, pois a matriz das derivadas segundas é quadrada com dimensões iguais ao número de variáveis de controle; para um modelo de trinta gerações são calculadas 841 derivadas!

Apresenta-se a seguir uma forma de implementar um algoritmo do tipo quase-Newton.⁴ A implementação mostrada é a sugerida por Broyden e consta na maioria dos livros de métodos numéricos:

- i) Forneça uma aproximação inicial para a solução, e inicie o indexador i como zero.
- ii) Calcule, ou assuma, uma aproximação inicial para a inversa da matriz Jacobiana B^i .
- iii) Calcule $p^i = -B^i f^i$, onde $f^i = f(x^i)$.
- iv) Determine um número t , de forma que $\|f(x^i + t_i p^i)\| \leq \|f^i\|$.
- v) Calcule $x^{i+1} = x^i + t_i p^i$.

⁴ Uma vez que a solução do sistema não-linear é parte fundamental do algoritmo proposto, e que existem diversas maneiras de se implementar o método de Broyden, torna-se necessária uma explicação de como este método é utilizado nesse artigo.

vi) Calcule $f^{i+1} = f(x^{i+1})$. Se $\|f^{i+1}\| < \varepsilon$, para ε próximo de zero, termina o algoritmo, caso contrário, seguir para o próximo passo.

vii) Use a formula abaixo para aperfeiçoar a aproximação do Jacobiano:

$$B^{i+1} = B^i - (B^i y^i - p^i)(p^i)' B^i / \{(p^i)' B^i y^i\} \text{ onde } y^i = f^{i+1} - f^i;$$

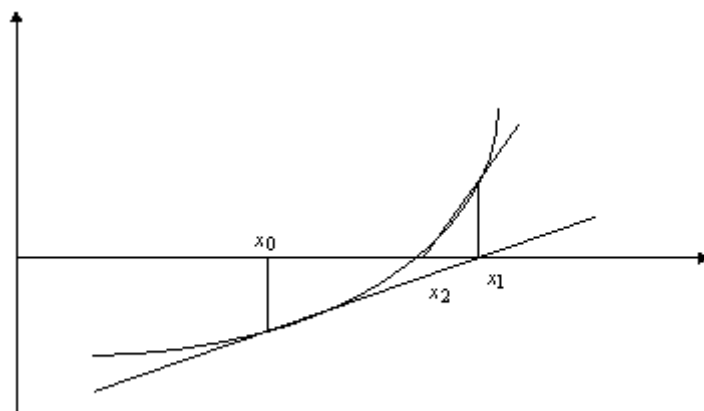
viii) Faça $i = i + 1$ e volte para o passo (iii).

Para se ter uma intuição do algoritmo basta observar o método de Newton para encontrar raízes de uma função qualquer. Este consiste no seguinte:

- i) Fornecer uma aproximação inicial e iniciar o indexador i como zero.
- ii) Calcular a imagem do valor fornecido, e traçar uma tangente a esse ponto.
- iii) O ponto onde a tangente encontra o eixo das abscissas serve como a próxima aproximação.
- iv) O processo deve ser repetido até a imagem ficar próxima o suficiente de zero, ou seja, $|f(x)| < \varepsilon$, para ε próximo de zero.

Graficamente, pode-se ilustrar o algoritmo da seguinte forma:

FIGURA 2



Na Figura 2 a aproximação inicial é x_0 ; dado esse valor, procura-se $f(x_0)$ no gráfico da função e traça-se uma tangente a esse ponto. O próximo passo é obtido encontrando-se o valor de x_1 . Novamente busca-se a tangente a $f(x_1)$, e assim sucessivamente até encontrar-se a raiz desejada.

Para avaliar a tangente torna-se necessário conhecer a derivada da função. Esta é a diferença desse método para o utilizado. No método de Broyden a derivada da função é aproximada, mas a lógica para encontrar a raiz é a mesma.

Métodos numéricos descendentes do método de Newton dependem, em geral, muito da aproximação inicial para resolver o problema proposto. Tal dependência existe tanto na velocidade de convergência quanto na sua possibilidade de encontrar a raiz.

Um paliativo utilizado no algoritmo foi fornecer a solução do problema relacionado ao período anterior como aproximação para a resolução do problema em cada período. Dessa forma garantiu-se que a aproximação inicial estava próxima da raiz procurada.

Neste ponto cabe voltar à questão das utilidades quadráticas. Nesse caso, toda a discussão sobre a resolução de sistemas não-lineares seria evitada, pois as condições de primeira ordem são lineares. Embora isto venha a facilitar a solução do problema, ao assumir esse tipo de preferência está-se incorrendo em todas as inconveniências associadas a esse tipo de função. De todo modo, vale ressaltar que, para essas funções, não vale a pena utilizar do método de solução proposto neste artigo, uma vez que existem alternativas bem mais simples para a solução de sistemas de equações lineares.

Encontrada a solução do sistema, torna-se possível calcular o estoque de capital da economia. Neste ponto resolve-se novamente o problema do consumidor e acha-se o novo estoque de capital. Quando os valores do estoque de capital estiverem suficientemente próximos um do outro é porque a economia chegou ao estado estacionário.

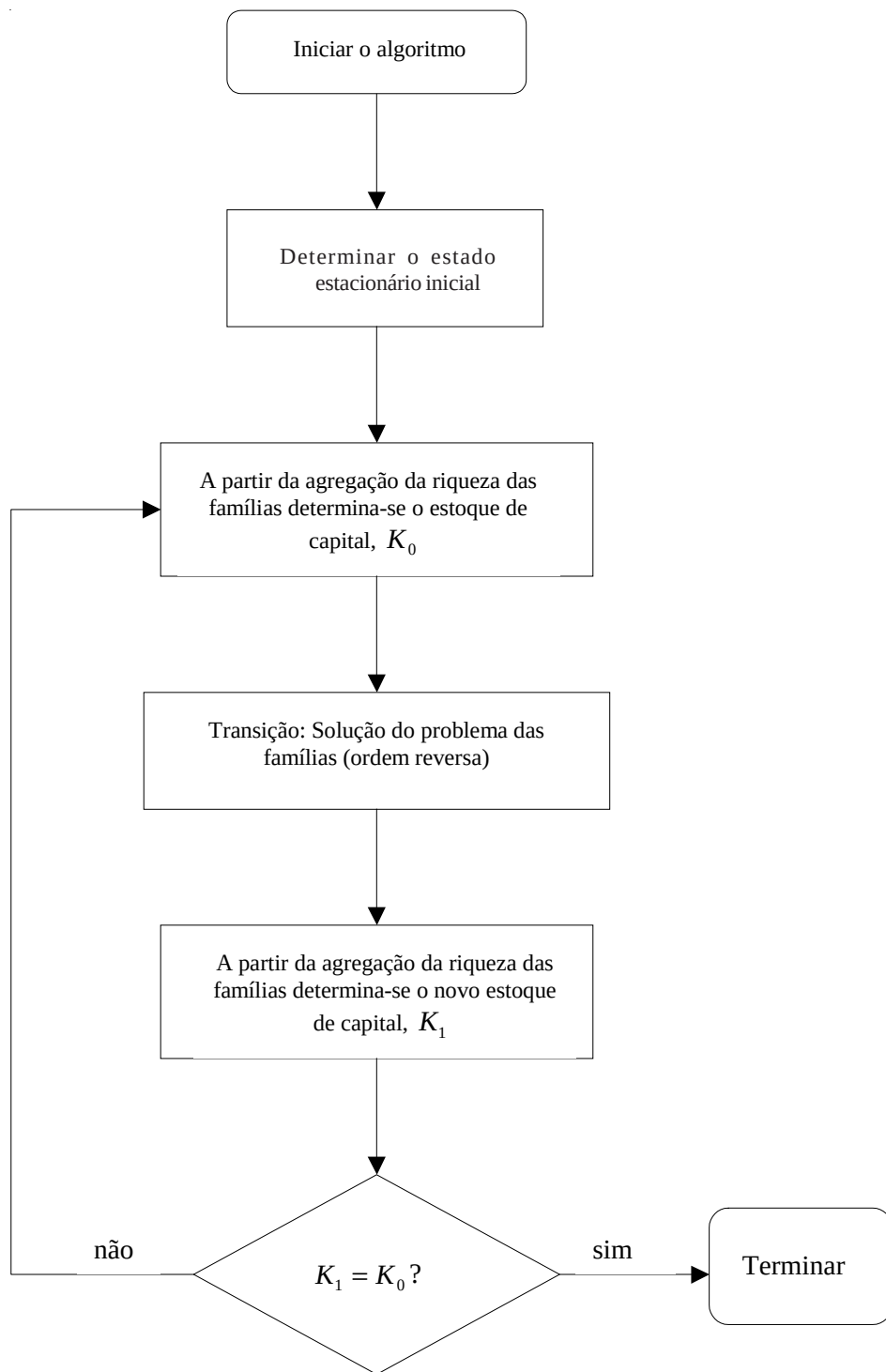
O problema da firma merece menos comentários uma vez que este é trivial. A firma escolherá capital até que a produtividade marginal do capital seja igual à sua remuneração. A escolha de trabalho será feita de forma a equalizar salário à produtividade marginal do trabalho.

Para se calcular os salários e a taxa de juros de cada período basta calcular a produtividade marginal do trabalho e do capital para o estoque de capital do período. Uma vez conhecidos esses valores, pode-se colocá-los na restrição orçamentária dos indivíduos, de forma que o problema dos indivíduos fica sendo escolher o quanto poupar e, por consequência, quanto consumir, dados os preços dos fatores. Repare-se que como a função de utilidade depende apenas do consumo, os indivíduos não escolhem o quanto trabalhar.

Com o método proposto evita-se a necessidade de providenciar um valor inicial para o estoque de capital e depois ter de iterar o algoritmo até que o valor do estoque de capital seja consistente com a escolha dos indivíduos. De fato, calcula-se a decisão de poupança de cada indivíduo junto com os preços dos fatores e depois determina-se o estoque de capital somando-se a poupança de cada indivíduo. Segue abaixo uma rápida descrição do algoritmo.

- i) Usando um algoritmo do tipo quase-Newton, calcule o estado estacionário para economia inicial;
- ii) Defina o contador como 1;
- iii) Salve o valor do estado estacionário, encontre o estoque de capital;
- iv) Use a solução do estado estacionário como condição inicial para resolver os problemas dos consumidores e da firma na nova economia. O problema do consumidor é resolvido com o mesmo algoritmo utilizado para o estado estacionário;
- v) Com a solução do problema do consumidor encontre o novo estoque de capital;
- vi) Compare o novo estoque de capital com o antigo e estabeleça um critério de igualdade, se o critério for obedecido pare o algoritmo;
- vii) Caso contrário, utilize o novo estoque de capital como condição inicial para a nova solução de equilíbrio. Use a solução do problema do consumidor como aproximação para o algoritmo que resolve o novo problema do consumidor;
- viii) Realize o incremento no contador, volte para o passo vi.

DESCRIÇÃO DO ALGORITMO PROPOSTO



No primeiro passo resolve-se o sistema de equações formado pela condições de primeira ordem do problema dos indivíduos mais as condições de primeira ordem dos problema da firma, qual seja:

$$U'(c_t^g) = \beta \frac{1+r}{1+x} U'(c_{t+1}^g) \quad \forall t=1, \dots, T-1$$

$$a_{T+1}^g = 0$$

$$w = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial L}$$

$$r = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K}$$

$$K = \sum_{i=1}^G \mu_t^g a_t^g$$

onde as variáveis possuem o mesmo significado da seção anterior, G é o número de gerações e μ representa a fração de cada geração no total de pessoas da economia.

No sistema acima as $T-1$ primeiras equações representam as condições de primeira ordem do problema dos indivíduos, a próxima equação representa a condição de que o indivíduo consome todo o seu patrimônio no último período de vida; finalmente são apresentadas as condições de primeira ordem da firma e a regra de agregação do capital. Desta forma, existem $G+3$ equações e $G+3$ incógnitas.⁵ Como no primeiro passo apenas o estado estacionário é calculado, podemos esquecer o subscrito que denota o tempo e considerar que cada geração representa um período do tempo.⁶

5 Quais sejam, a poupança a cada período: $s_t^g = (1+x)a_{t+1}^g - a_t^g \quad \forall t=1, \dots, T$; os preços dos fatores: r e w ; e o estoque de capital (K).

6 Neste caso vale que $G = T$.

Esta etapa, que consiste no cálculo do estado estacionário, apresenta uma diferença fundamental em relação ao algoritmo proposto em Auerbach e Kotlikoff (1987),⁷ uma vez que não foi exigido uma aproximação para o estoque de capital inicial. Para este caso o estado estacionário é calculado da seguinte forma:

- i) Providencie uma aproximação inicial para K_0 ;
- ii) Determine os preços dos fatores associados a este valor de K_0 ;
- iii) Resolva o problema dos indivíduos;
- iv) A partir do problema dos indivíduos determine o novo estoque de capital, K_1 ;
- v) Se $|K_1 - K_0| < \varepsilon$, para um determinado $\varepsilon > 0$ o algoritmo é encerrado, do contrário, faça $K_0 = K_1$ e volte para o passo (ii).

O método proposto neste artigo depende mais das condições iniciais para convergir, que ao invés de um número é um vetor no R^{G+3} , porém o método AK necessita resolver o sistema não-linear para cada iteração em K .

Até este passo foi possível descrever o estado estacionário da economia. Assim, o método pode ser usado para determinar tanto o estado estacionário inicial quanto o final, desde que este último não dependa da transição.⁸ Para calcular a transição temos que considerar que tanto os preços dos fatores quanto as decisões dos indivíduos estão mudando no tempo. Esse efeito complica o problema na medida em que o salário de indivíduos da mesma idade, em períodos diferentes de tempo, pode ser diferente, ou seja, um indivíduo no segundo período de vida em $t = 10$ terá um salário diferente de um indivíduo no segundo período de vida em $t \neq 10$.

A maneira sugerida por Auerbach e Kotlikoff para calcular a transição consiste em resolver simultaneamente o problema de todas as gerações

7 Este algoritmo também é conhecido como AK.

8 A este respeito ver AUERBACH & KOTLIKOFF (1987).

que estarão vivas neste período. Desta forma, seria possível resolver o problema de que ao decidir o quanto consumir o indivíduo deve considerar não apenas os preços presentes, mas também os preços futuros. Esta proposta resolve o problema de forma precisa, porém implica um custo computacional muito alto, pois o número de equações a serem resolvidas seria igual ao número de gerações vezes o tempo necessário para transição, que se sugere ser de aproximadamente 150 anos.

Caso fosse utilizado o método aqui proposto, o número de anos necessários para transição deveria ser multiplicado pelo número de gerações mais três, implicando 450 equações a mais para uma transição de 150 anos. Dado o alto custo computacional do método AK, é comum que este algoritmo seja utilizado apenas para o cálculo de estados estacionários, como em Barreto e Oliveira (2001) e Lanes Jr. (1999).

A partir do método para o cálculo do estado estacionário que propomos neste trabalho é possível derivar uma forma de calcular a transição entre os estados estacionários. Para isto, considere um determinado período t , período no qual estarão vivas G gerações, que receberão salários e juros determinados por um dado estoque de capital, de forma que em um determinado período t as decisões das gerações vivas são descritas pelo sistema:

$$U'(c_t^g) = \beta \frac{1+r_t}{1+x} U'(c_{t+1}^g) \quad \forall t = 1, \dots, T-1$$

$$a_{T+1}^g = 0$$

$$w_t = \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t}$$

$$r_t = \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t}$$

$$K_t = \sum_{i=1}^G \mu_t^i a_t^i$$

Para resolver este sistema precisamos do estoque de capital nos períodos t até $t+G$, valor este que não é conhecido, uma vez que os problemas das gerações futuras ainda não foram resolvidos. Entretanto, podemos resolver o problema de maneira reversa. Suponhamos que o choque tenha ocorrido no período t , que conhecemos o estoque de capital de todos os períodos até o momento do choque, pois a economia encontrava-se no estado estacionário, com o estoque de capital determinado no primeiro passo.

Desta forma é possível resolver o sistema de t até $t-G-1$ utilizando os valores já conhecidos para o estoque de capital e obter o estoque de capital em t como solução, ou seja, resolve-se o sistema:

$$U'(c_\tau^g) = \beta \frac{1+r_\tau}{1+\chi} U'(c_{\tau+1}^g) \quad \forall \tau = t-G, \dots, t$$

$$a_{t+1}^g = 0$$

$$w_\tau = \frac{\partial F(K_\tau, A_\tau L_\tau)}{\partial L_\tau}$$

$$r_\tau = \frac{\partial F(K_\tau, A_\tau L_\tau)}{\partial K_\tau}$$

$$K_\tau = \sum_{i=1}^G \mu_\tau^i a_\tau^i$$

O mesmo método pode ser utilizado de $t+1$ em diante, até que o estoque de capital em um período seja suficientemente próximo do estoque de capital do período anterior. Quando isto ocorre, o algoritmo pára e se considera que a economia chegou a um novo estado estacionário. Finalmente, pode-se utilizar o algoritmo do primeiro passo para calcular o estado estacionário final e comparar com o encontrado no final da transição.

Note-se que com essa implementação o que ocorre é uma solução, a cada período, dos problemas dos indivíduos de cada geração por meio da

solução das condições de primeira ordem. Essa é a principal diferença em relação aos métodos que constroem uma representação recursiva para o problema, por meio de uma função valor, e resolvem o problema dos consumidores por meio de métodos de programação dinâmica, como em Imrohoroglu, Imrohoroglu e Jones (1999). Uma discussão mais profunda sobre as diferentes formas de solução numérica para modelos de gerações superpostas encontra-se em Judd (1999)

Dado o caráter do algoritmo proposto, é possível não só encontrar estados estacionários, mas também toda a transição para este estado. Dessa forma, seria possível analisar os efeitos de uma política não apenas no estado estacionário, mas durante toda a trajetória da economia até chegar a esse estado.

Considerando-se que políticas são implementadas por governos e que estes raramente continuarão governo até que a economia encontre o novo estado estacionário, a trajetória de transição passa a ser fundamental para a discussão da viabilidade de uma determinada política. É interessante notar que, em geral, o tempo necessário para que a economia encontre o novo estado estacionário é maior do que o tempo de vida dos indivíduos que estavam vivos na época de implementação da reforma, o que magnifica a importância de se conhecer a trajetória de transição entre dois estados estacionários.

É válido observar que o algoritmo fornece o padrão de poupança e, por consequência, o de consumo de todas as gerações, não só daquelas que viveram durante os estados estacionários. Desse modo, é possível encontrar a utilidade dos indivíduos de cada geração e a utilidade social para um dado período durante a transição.

3. EXEMPLO: TRANSIÇÃO PARA O ESTADO ESTACIONÁRIO EM UM SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO

Um tipo de literatura que é frequentemente associada a modelos de gerações superpostas é a questão da previdência. Como esta questão

envolve diretamente o problema de transferir renda entre gerações, esses modelos são muito apropriados para tratá-la.

Ocorre que, para a análise ser de interesse, é necessário que exista um número suficientemente grande de gerações, permitindo-se analisar os efeitos sobre as variáveis macroeconômicas dos diversos modelos de previdência. Para modelos com duas gerações a análise fica um tanto quanto debilitada porque a única maneira de introduzir previdência é fazer com que os indivíduos trabalhem no primeiro período e se aposentem no segundo, o que corresponde a dizer que os indivíduos passam metade da vida aposentados.

Outro problema de se trabalhar com duas gerações é a impossibilidade de estudar, de maneira apropriada, os custos que envolvem uma transição de um sistema do tipo repartição simples para um sistema do tipo capitalização. Essa é uma consequência de os indivíduos se aposentarem por um período, o que torna os custos de transição iguais à aposentadoria da geração mais velha, tornando o problema trivial e pouco elucidativo. Por exemplo, não há como avaliar as pessoas que estão contribuindo mas ainda não se aposentaram.

O uso de modelos com muitas gerações para analisar transição de sistemas previdenciários foi iniciado por Auerbach e Kotlikoff para os Estados Unidos. Depois essa técnica foi sendo divulgada, e surgiram análises semelhantes para diversos países. Barreto e Oliveira (1995) fizeram uma análise para o Brasil com um modelo de cinquenta e cinco gerações. Porém, no caso brasileiro, a análise se limita a caracterizar os estados estacionários, sem explicitar as trajetórias de transição.

O exemplo apresentado consistirá em se encontrar o estado estacionário para um modelo nas linhas do apresentado na segunda seção, aumentado para levar em conta a herança e a existência de um sistema previdenciário. A implementação do algoritmo é feita por meio de um código elaborado para o MATLAB.

Os agentes vivem por cinquenta e cinco períodos. No trigésimo quinto período eles se aposentam e passam a viver de transferências das gerações mais novas. A cada período coexistem cinquenta e cinco gerações, sendo que as vinte mais novas sustentam as mais antigas; está implícito que ao envelhecerem os jovens de hoje serão sustentados pelos futuros jovens.

Claro está que a certeza de uma renda futura diminui o incentivo a poupar, pelo menos com as hipóteses do modelo, uma vez que o indivíduo pode garantir uma renda estável, o que reduz, de forma considerável, um dos incentivos à poupança do modelo, que é suavizar o padrão de consumo no tempo. Por exemplo, um indivíduo que se aposenta com salário integral tem um aumento de renda no período inativo, considerando que este não mais desconta para fins de previdência.

O problema das firmas é idêntico ao da segunda seção e não será revisto. O problema dos consumidores que sofre algumas alterações fica da forma:

$$\begin{aligned} \underset{\{c_t\}_{t=1}^T}{Max} \quad & \sum_{t=1}^{30} \beta^{t-1} U(c_t^g) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta b \\ \text{t.q. } c_1^g = & (1-d1)w_1 - (1+x)a_2^g + \frac{b}{(1+n)^{29}} \\ c_t^g = & (1-d1)w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 2, \dots, 20 \\ c_t^g = & d2w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 21, \dots, 29 \\ c_T^g = & w_T + (1+r_T)a_T^g - b \end{aligned}$$

onde $d1$ é a alíquota sobre o salário para fins de previdência e $d2$ é a porcentagem do salário que o indivíduo recebe após aposentado. Assume-se que a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, da forma:

$$F(K, L) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

Enquanto a função de utilidade é suposta ser do tipo CES, da forma:

$$U(c_t) = \frac{\gamma}{\gamma-1} c_t^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

Serão apresentados resultados para dois conjuntos de parâmetros:

Parâmetro	Modelo 1	Modelo 2
Participação do Capital (α)	0,50	0,50
Taxa de Desconto Intertemporal (β)	0,94	0,94
Elasticidade de Substituição (γ)	0,70	0,70
Desconto para Herança (δ)	0,60	0,60
Crescimento da Produtividade (x)	0,008	0,008
Crescimento da População (n)	0,023	0,023
Desconto para Previdência ($d1$)	0,20	0,30
Depreciação	0,035	0,035

A porcentagem do salário a ser recebida após a aposentadoria é calculada a partir de $d1$, de modo a garantir o equilíbrio do sistema previdenciário. Para efeito de comparação serão usados dois valores para $d1$: no modelo básico (modelo 1) será usado o valor de 0,20, enquanto que no modelo alternativo (modelo 2) $d1$ será igual a 0,30. Os outros parâmetros foram usados para aproximar a economia brasileira, seguindo Barreto e Oliveira (1995). O parâmetro para heranças é o mais complicado, uma vez que este não é de uso comum.

Para encontrar o valor de δ foi levado em consideração que, sendo a taxa de desconto 0,94, o indivíduo estaria descontando seu consumo no trigésimo período a uma taxa $0,94^{30}$, que é aproximadamente 0,16. Considerou-se então que os pais valorizam mais o consumo dos filhos que o seu para chegar ao valor apresentado, que corresponde a uma taxa de desconto de aproximadamente 0,98 para os filhos.⁹

O exercício consistirá em utilizar o estado estacionário com previdência como condição inicial para um modelo igual ao apresentado, porém sem

9 Marco Martins argumenta que o valor de δ pode ser superior a um. Porém, como não existe uma estimativa deste parâmetro, resolvemos aproximá-lo da maneira proposta acima. Ver MIRANDA (1997) e ARAUJO & MARTINS (1999).

previdência.¹⁰ Nesse caso, é só construir o modelo como na seção 1, fazendo o salário igual a zero a partir do vigésimo período.

A princípio pode-se esperar um aumento do estoque de capital e uma mudança no padrão de poupança. Uma vez que os indivíduos não mais possuem uma renda garantida no período inativo, a única maneira de suavizar o consumo é poupando enquanto ativo. Esse aumento da poupança fatalmente levará a um aumento do estoque de capital no estado estacionário.

As taxas de juros e o salário têm seu comportamento tirado diretamente do estoque de capital. Dessa forma, os salários devem crescer, enquanto as taxas de juros devem cair em razão da existência de rendimentos decrescentes.

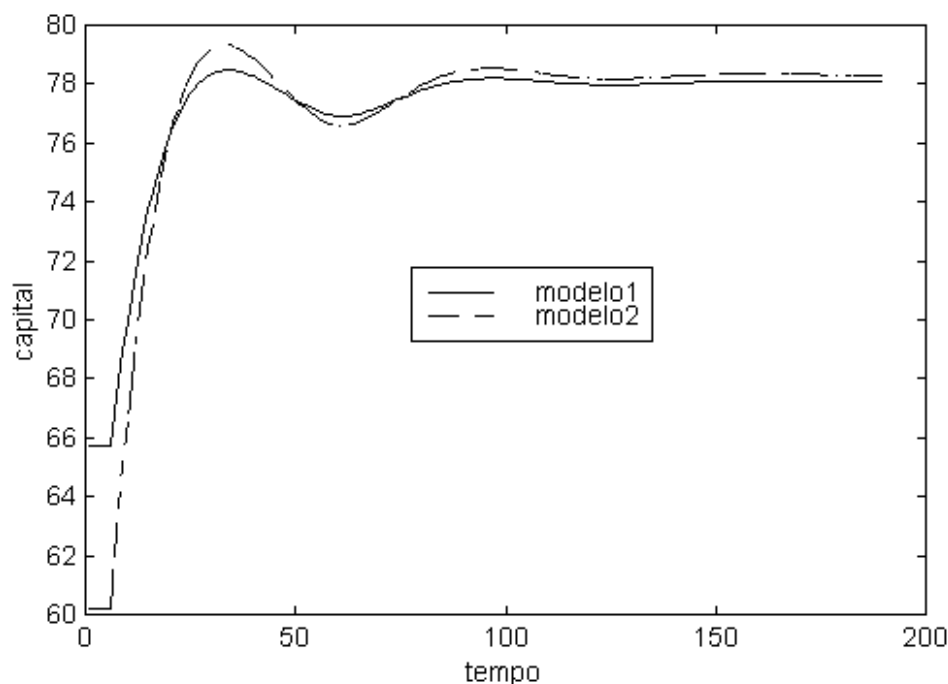
Esse aumento do estoque de capital e do salário poderia sugerir formas de financiar uma eventual transição para um sistema de capitalização. De fato, o governo poderia financiar esse processo taxando os ganhos causados pela mudança do sistema. Este é um tópico que os autores pretendem desenvolver em futuras pesquisas.

A maior incógnita passa a ser o que acontece com a herança. Com o fim da previdência, os filhos deixam de subsidiar a velhice dos pais, ou seja, existe uma transferência de renda em favor das novas gerações. Esse efeito aponta para uma redução no valor das heranças. Em contrapartida, com o aumento do estoque de capital, os pais passam a ter mais recursos, possibilitando uma maior herança. Não se pode ter certeza sobre qual efeito irá prevalecer (a Figura 6 ilustrará esse efeito).

A Figura 3 mostra a trajetória do estoque de capital:

10 Note-se que esse exercício não corresponde a simular a transição entre dois tipos de sistemas previdenciários, sendo essa simulação tema para uma pesquisa à parte.

FIGURA 3



Note-se que a economia começa em estado estacionário com um estoque de capital bastante baixo. Logo após a eliminação da previdência, existe um acentuado salto no estoque de capital que, depois, segue sua trajetória para o novo estado estacionário. Este comportamento é observado nos dois modelos.

Em termos de estoque de capital, pode-se observar que a diferença significativa entre os dois modelos diz respeito apenas à magnitude desta variável. Como esperado, o modelo com maior desconto para a previdência leva a um menor estoque de capital. Vale ressaltar que a forma da trajetória nos dois modelos é basicamente a mesma: no primeiro momento ocorre uma superacumulação de capital, que tende a se ajustar com o passar dos anos. No caso do modelo 2, a superacumulação é maior devido ao fato de o sistema previdenciário estar impondo maiores distorções.

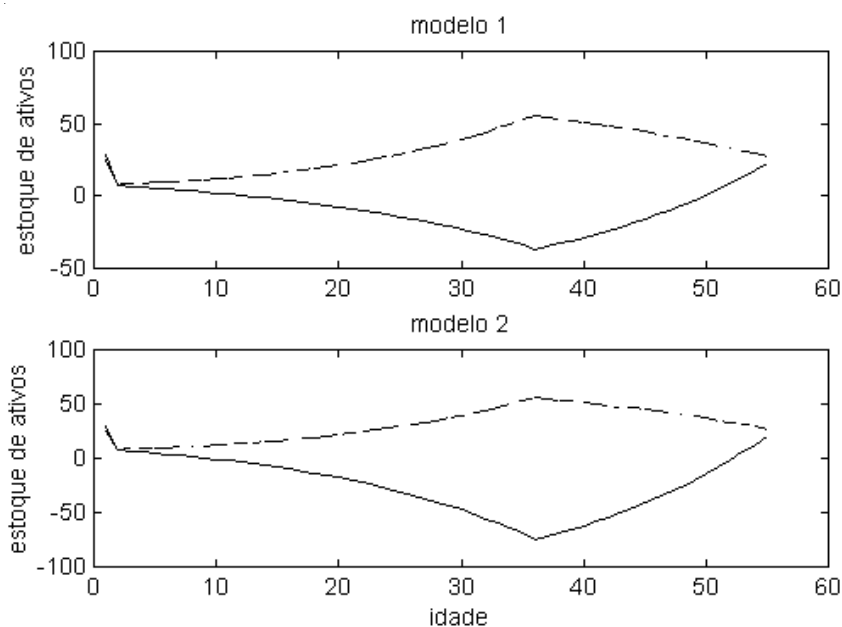
Por fim, vale observar que ambas as economias convergem para o mesmo estado estacionário, um resultado esperado tendo em vista que a única diferença entre os modelos é a alíquota de previdência. Esse resultado indica que o algoritmo não depende de valores iniciais para encontrar o estado estacionário.

Para determinar o estoque de capital no estado estacionário, primeiro é feita sua definição como uma situação em que todas as variáveis são constantes em unidades de eficiência. O segundo passo é impor a definição de estado estacionário nas condições de primeira ordem. Finalmente, resolve-se o problema para as condições de primeira ordem já modificadas, obtendo-se, assim, o padrão de poupança no estado estacionário.

As iterações são feitas até que a diferença entre o estoque de capital em dois períodos subsequentes seja menor que 0,00001.

Essa mudança no nível de capital deve-se à mudança no padrão de acumulação dos indivíduos causada pelo fim do sistema previdenciário. A Figura 4 ilustra esta mudança.

FIGURA 4



A linha pontilhada mostra o estoque de ativos¹¹ no estado estacionário sem previdência. Note-se que o indivíduo acumula crescentemente para poder financiar seu período inativo. Na outra linha, em que há previdência, isso não acontece, uma vez que o financiamento do período inativo está garantido. É essa mudança no padrão de acumulação que justifica o aumento do capital no estado estacionário sem previdência.

Novamente, a diferença entre os modelos 1 e 2 está na magnitude dos valores do estado estacionário inicial. No resultado final, o padrão de acumulação é o mesmo, visto que as economias são as mesmas.

Um ponto interessante seria observar o que acontece com o padrão de poupança dos indivíduos durante suas vidas. Para isso é necessário ter claro a idéia do que consiste poupança no modelo. A obtenção da poupança é feita a partir da restrição orçamentária dos agentes. Para isso, utiliza-se a definição de poupança, ou seja, renda menos consumo.

$$c_t = w_t + (1 + r_t)a_t - (1 + x)a_{t+1} \Rightarrow$$

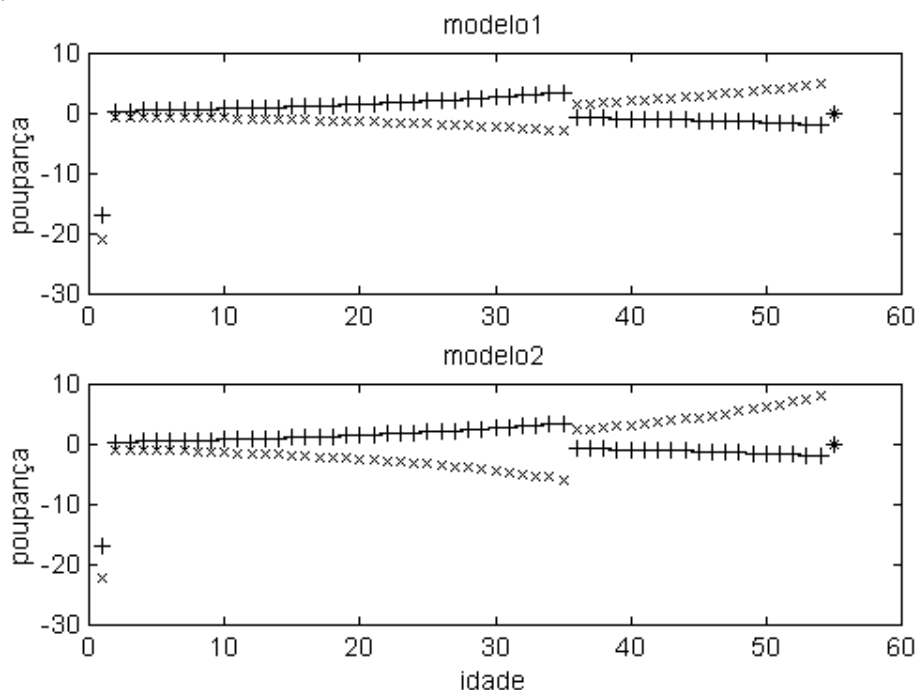
$$\Rightarrow w_t + r_t a_t - c_t = (1 + x)a_{t+1} - a_t$$

$$\Rightarrow s_t = (1 + x)a_{t+1} - a_t$$

A Figura 5 ilustra o que ocorre com a poupança. O símbolo de ‘+’ corresponde ao modelo sem previdência, enquanto ‘x’ corresponde ao modelo com previdência. Observe-se que no princípio as curvas têm um comportamento semelhante. No primeiro período os indivíduos recebem e herança e utilizam seus recursos gerando uma poupança negativa. Posteriormente, começam a construir seus patrimônios. Esta tendência é mais acentuada no modelo sem previdência.

11 No primeiro período considera-se o estoque de ativos mais a herança.

FIGURA 5

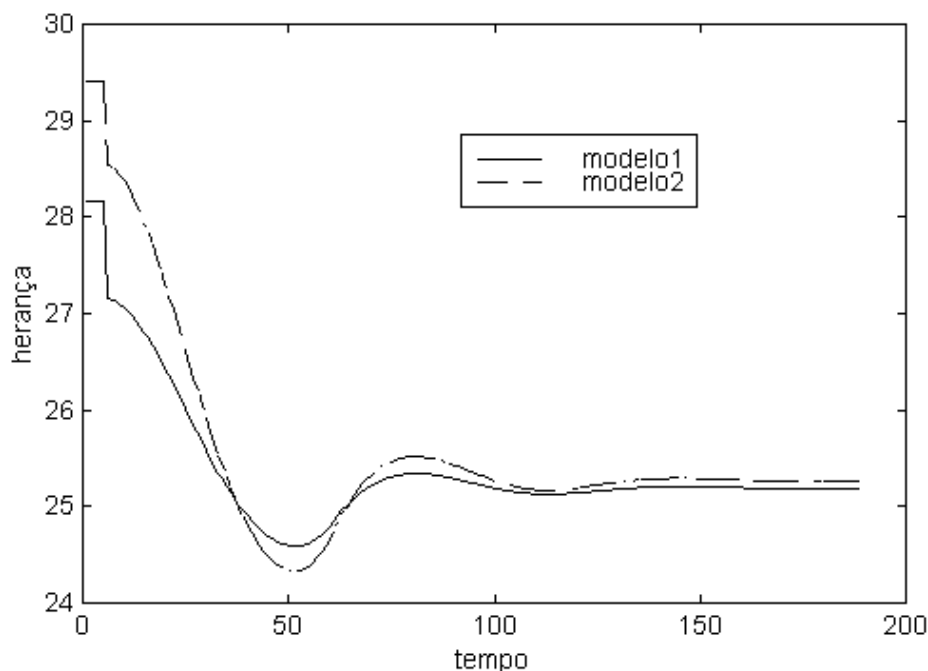


No caso sem previdência, a partir de um certo ponto os indivíduos poupam cada vez mais com a finalidade de construir um patrimônio para o período inativo. Quando existe previdência, os indivíduos não têm essa preocupação e poupam cada vez menos, chegando a desacumular quando perto da aposentadoria. Após pararem de trabalhar, os indivíduos que recebem aposentadoria passam a construir um patrimônio para deixar de herança, enquanto os que não têm aposentadoria passam a utilizar seu patrimônio para poder viver. Mais uma vez o comportamento nos modelos 1 e 2 são bastante semelhantes.

Um último ponto de interesse do modelo é o que ocorre com a herança. A Figura 6, a seguir, ilustra o processo. Após o fim da previdência, os agentes se ajustam diminuindo a herança. Isso é explicado em razão de as gerações mais velhas usarem a herança que iriam deixar para os filhos para repor parte das perdas geradas pelo fim da aposentadoria. Depois, à medida que a economia progride para o novo estado estacionário, as heranças voltam a aumentar, porém sem voltar aos níveis anteriores. A

conclusão é de que a herança serve para contrabalançar o fim da aposentadoria como mecanismo de transferência de renda entre as gerações. Isto vem justificar o fato de na economia com maiores contribuições para aposentadoria existir um maior volume de heranças.

FIGURA 6

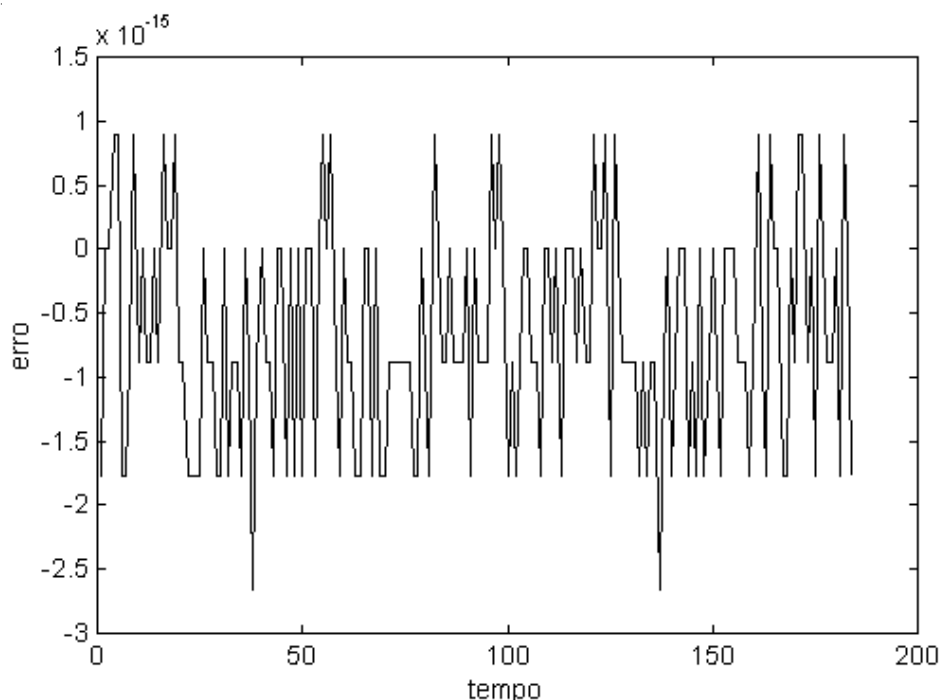


Finalmente, cabem alguns comentários a respeito das possibilidades de teste para o método de simulação. Um teste natural é observar o que acontece quando a alíquota de previdência é, inicialmente, igual a zero. Espera-se que as variáveis não sofram nenhuma alteração, uma vez que alíquota zero de previdência é equivalente a não ter previdência.

Dessa forma, testou-se o modelo com dl igual a zero, e a rotina foi modificada para que existissem cem iterações, independente de se encontrar o estado estacionário. Como se esperava, o estoque de capital e a herança permaneceram constantes em todas as iterações.

Um outro teste é comparar os resultados do modelo com o que é esperado pela teoria. Em particular, deve-se observar que se o modelo estiver correto, vale a igualdade entre produto e renda agregados, $y = w + rk$. A Figura 7 mostra esta diferença.

FIGURA 7



Na figura acima fica claro que a diferença é toda devida ao processo de arredondamento feito pelo computador. Vale destacar que o maior valor absoluto para a diferença é de $2.6645\text{e-}15$, ou seja, insignificante, enquanto a norma deste vetor é $1.9840\text{e-}15$. Também é interessante notar que a média dos erros é igual a $-9.2534\text{e-}16$, sendo todos estes números próximos de zero.¹²

Esta seção apresentou uma resolução para um modelo de gerações superpostas. O modelo foi resolvido de acordo com o algoritmo

¹² Para a versão 5.1 do MATLAB instalada em um Pentium 166, foi encontrado um valor de zero correspondente a $2.2204\text{e-}16$.

apresentado na seção anterior. Observa-se que os resultados não destoam do que seria esperado pela teoria econômica e que o algoritmo resiste a vários testes visando avaliar sua aplicabilidade.

CONCLUSÕES

O artigo buscou apresentar um método para a resolução de modelos de gerações superpostas onde existam muitas gerações. Também foi apresentado um exemplo de aplicações do método.

O método apresentado possui a vantagem de explicitar toda a trajetória de transição de um estado estacionário para outro, possibilitando a análise de mudanças nos padrões de consumo e no bem-estar da sociedade durante a transição.

Futuros desenvolvimentos do método apontariam no sentido de procurar formas mais gerais de resolver o sistema de equações não-lineares, que caracteriza as condições de primeira ordem. Note-se que a solução encontrada para aperfeiçoar os chutes durante o cálculo da transição não se aplica quando o objetivo é encontrar o estado estacionário inicial. Uma maneira de produzir melhores chutes seria tentar resolver o sistema por de meio de métodos que demorem mais para convergir, porém não dependam tanto das condições iniciais. A idéia é encontrar uma solução com um largo limite de tolerância, ou seja, uma aproximação ruim, e utilizar esta solução como valor inicial para o algoritmo de Broyden. Métodos deste tipo são facilmente encontrados em livro de cálculo numérico.

Também pode-se buscar maior refinamento nos valores encontrados como solução do sistema. Métodos de solução que aplicam pequenos choques aleatórios nas raízes encontradas são úteis para testar estabilidade e para fugir de pontos extremos.

Uma outra sugestão para futuras pesquisas seria incluir lazer na função de utilidade. Como isso incluiria um grande número de novas equações

nas condições de primeira ordem, o método de solução do sistema não-linear provavelmente teria que ser revisto.

Finalmente, deve-se apontar para outras possíveis aplicações dos modelos aqui tratados. Em particular, pode-se buscar uma maneira de financiar a transição de um sistema de repartição para um de capitalização com receitas tributárias geradas sobre o aumento do estoque de capital. Outra interessante aplicação é comparar o financiamento da dívida pública via títulos e via tributação, com vistas a analisar a equivalência ricardiana.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, Thompson; MARTINS, Marco A. C. *Economic growth with finite lifetimes*. Economic Letters, 1999.
- ARRAU, Patricio; SCHIDT-HEBELL, Klaus. *Macroeconomics and intergenerational welfare effects of a transition from a pay-as-you-go to fully-funded pension systems*. 1993 (Versão preliminar).
- AUERBACH, Alan; KOTLIKOFF, Laurence. *Dynamic fiscal policy*. Cambridge University Press, 1987.
- BARRETO, F; OLIVEIRA, L. G. Aplicação de um modelo de gerações superpostas para a reforma da previdência no Brasil: uma análise de sensibilidade no estado estacionário. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria*, 1995.
- _____. Privatização da seguridade social no Brasil: um enfoque de equilíbrio geral computável. *Anais do XIX Encontro Brasileiro de Econometria*, 1997.
- _____. Transição para regimes previdenciários de capitalização e seus efeitos macroeconômicos de longo prazo no Brasil. *Estudos Econômicos*, v. 31, n. 1, p. 57-87, jan./mar. 2001.
- ELLERY JR., R.; BUGARIN, M. Previdência social e bem-estar no Brasil. *Anais do XXIX Encontro Nacional de Economia*, 2001.
- ENGELN-MÜLLGES, Gisela; UHLIG, Frank. *Numerical algorithms with C*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- FARMER, Roger. *The macroeconomics of self-fulfilling prophecies*. Cambridge, MA.: The MIT Press, 1993.
- HUANG, He; IMROHOROGLU, Selahattin; SARGENT, Thomas. *Two computations to fund social security*. 1996 (Versão preliminar).

- IMROHOROGLU, A.; IMROHOROGLU, S.; JONES, D. Computing models of social security. In: MARIMON & SCOTT (eds.), *Computational methods for the study of dynamic economies*. Oxford University Press, 1999.
- JUDD, Kenneth. *Numerical methods in economics*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1999.
- KOTLIKOFF, Laurence. Simulating the privatization of social security in general equilibrium. *NBER Working Paper* 5776, 1996.
- KRUSSEL, Per; RÍOS-RIULL, José Victor. *Choosing not to grow: how bad policies can be outcomes of dynamic voting equilibria*. 1992 (Versão preliminar).
- LANNES JR. *Aspectos macroeconômicos da reforma da previdência social no Brasil: duas análises em equilíbrio geral com restrições ao crédito*. 1999. Tese (doutorado). EPGE/FGV, Rio de Janeiro.
- LINDFIELD, George; PENNY, John. *Numerical methods using MATLAB*. Ellis Horwood, 1995.
- LUCAS, Robert E. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 1988.
- MARTINS, Marco A. Bonds, interests and capital accumulation. *Revista Brasileira de Economia*, 1995.
- McCANDLESS, George; WALLACE, Neil. *Introduction to dynamic macroeconomics theory: an overlapping generations approach*. Cambridge, MA.: Harvard University Press, 1995.
- MIRANDA, Rogério. Três modelos teóricos para previdência social. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 1997.
- PRESS, Willian; TEUKOLSKY, Saul; VETTERLING, Willian; FLANNERY, Brian. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1994.

Os autores agradecem aos comentários de João Ricardo Faria, Adolfo Sachsida, Marcelo Caetano, Francisco Pereira e dos participantes do seminário apresentado no XX Encontro Brasileiro de Econometria, bem como a um parecerista anônimo da revista *Estudos Econômicos*. Qualquer erro remanescente é de inteira responsabilidade dos autores.

(Recebido em abril de 2001. Aceito para publicação em agosto de 2001).