

Um Estudo Empírico da Evolução das Taxas de Juros de Curto Prazo no Brasil Desde o 'Plano Real'

Ailton Cassettari

Doutor em Física pela USP, Analista do Depto. de Pesquisa do Banco Sudameris-Brasil S.A.

RESUMO

Neste trabalho, um estudo semi-empírico da evolução das taxas de juros no Brasil, com base no período 01/01/95-31/12/99, foi feito com o auxílio de um método desenvolvido recentemente por Ahabai, Wilmott, Oztukel e outros. O objetivo principal foi obter uma estimativa da taxa de juros 'futura' a partir de uma taxa inicial, que fosse consistente com os dados históricos. Foram realizadas simulações via Monte Carlo e obtidas as trajetórias da taxa para um período de 150 dias a frente. Os resultados parecem indicar que há uma tendência da taxa em se aproximar da média histórica do período analisado. Isso possibilitou que uma estimativa preliminar da 'taxa de reversão' à média fosse também feita. Foram realizadas confrontações com outros estudos similares e com os dados do mercado, que atestam a plausibilidade e efetividade do método aqui implementado.

PALAVRAS-CHAVE

taxas de juros, estimação empírica, métodos estatísticos

ABSTRACT

In this work, a semi-empirical study of the evolution of the short interest rate in Brazil, on the basis of period 01/01/95-31/12/99, was made with the aid of a method developed recently by Ahabai, Wilmott, Oztukel and others. The main objective was to obtain a estimate of 'future' interest rate from an initial rate, that was consistent with the historical data. Simulations had been carried through Monte Carlo Method and gotten the trajectories of the interest rate for a period of 150 days the front. According to the results, there is a trend of the rate in approaching to the historical average of the analyzed period. This made possible that a preliminary estimate of the 'mean reversion rate' was also made. Confrontations with other similar studies and the data of the market had been carried through. This shows the plausibility and effectiveness of the method implemented here.

KEY WORDS

interest rate, empirical estimation, statistical methods

JEL Classification

C13, C15, C80

INTRODUÇÃO

No estudo da evolução das taxas de juros no Brasil depara-se, invariavelmente, com a dificuldade em se utilizar deste ou daquele modelo teórico que, na maioria das vezes, têm pouca efetividade de aplicação ao singular mercado brasileiro. Neste contexto, o mais indicado, em nossa opinião, seria implementar um procedimento essencialmente empírico, segundo o qual a evolução da taxa de juros fosse condizente com os dados históricos. Deve-se esperar, destarte, que, uma vez implementada, essa análise possa ser útil, dentro de certa tolerância, para a estimativa da taxa de juros futura em condições econômicas normais.

Na literatura de Finanças e Estatística há certo número de métodos, razoavelmente complexos, que se prestam a análises como esta. Dentre esses, um dos mais simples, mas muito poderoso, é o que foi desenvolvido recentemente por Apabhai e outros (1995). O atrativo deste método é que muitas das hipóteses acerca da evolução da taxa (tais como reversão à média, inexistência de taxas de juro negativas, dentre outras) não necessitam ser admitidas de antemão. Em essência, **todas as informações substanciais sobre a evolução da taxa provêm dos dados históricos**. Entretanto, o método também tem seus reveses - poucos -, que serão discutidos mais tarde. Em trabalho anterior (CASSETTARI, 2000), o mesmo método foi aplicado à volatilidade do 'Cupom Cambial', com resultados satisfatórios.

No que segue, vamos discutir, brevemente, os principais modelos sobre taxas de juros, aos quais faremos referência subseqüentemente e, a seguir, passar à implementação do método para estimar a evolução temporal das taxas no Brasil.

I. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelos Tradicionais de Evolução das Taxas de Juros

Diferentemente do que acontece com os modelos de evolução de preços de ativos, tais como ações ou taxas de câmbio, os modelos de taxas de juros são mais complicados, pois dizem respeito à movimentação de uma curva inteira, ao invés de uma única variável.¹

De forma geral, os modelos de estrutura a termo de taxas de juros mais usados em finanças são conhecidos como 'modelos de equilíbrio'. Um sério revés deste tipo de modelo é que a estrutura a termo inicial é um resultado do modelo, ao invés de ser uma informação de entrada, o que é uma grande desvantagem quando da avaliação de derivativos. Por seu turno, outra categoria de modelos - os baseados nas teorias de não-arbitragem - tem justamente a propriedade de assumir a estrutura temporal como dada e definir como se dará sua evolução com o passar do tempo.

De outra parte, os modelos que tratam de taxas de juros são muitas vezes divididos entre **modelos de um fator** e **modelos de dois fatores**, respectivamente se o processo assumido para a taxa envolve **uma** ou **duas** fontes de incertezas. No primeiro caso, a taxa de juros é descrita num mundo neutro ao risco por um processo de Wiener (denotado por dX) da forma:

$$dr = m(r)dt + s(r)dX \quad (1)$$

na qual o *drift* instantâneo $m(r)$ e o desvio padrão $s(r)$ são independentes do tempo, mas dependentes de r . Dependendo das formas funcionais para m e s os modelos recebem diferentes denominações:

1 Uma descrição dos modelos citados na sequência pode ser encontrada, por exemplo, em HULL (1997).

$$1) \quad m(r) = \mu r; \quad s(r) = \sigma r \quad (\text{Rendleman-Bartter})$$

$$2) \quad m(r) = a(b - r); \quad s(r) = \sigma \quad (\text{Vasicek})$$

$$3) \quad m(r) = a(b - r); \quad s(r) = \sigma \sqrt{r} \quad (\text{Cox-Ingersoll-Ross})$$

$$4) \quad m(r) = a(t); \quad s(r) = \sigma \quad (\text{Ho-Lee})$$

$$5) \quad m(r) = a(t) - b(t)r; \quad s(r) = \sigma(t) \quad (\text{Hull-White I})$$

$$6) \quad m(r) = a(t) - b(t)r; \quad s(r) = \sigma(t)\sqrt{r} \quad (\text{Hull-White II})$$

Por outro lado, Black, Derman e Toy (1990) desenvolveram um modelo um tanto diferente dos outros supradescritos:

$$d(\log r) = \left(\theta(t) - \frac{w'(t)}{w(t)} \log r \right) dt + w(t) dX \quad (2)$$

A intenção principal deste modelo é 'aderir' aos dados do mercado muito facilmente, por meio da adequada escolha dos parâmetros em questão.

No que diz respeito aos modelos de dois fatores, nos limitaremos, tão-somente, a citar os principais, que são analiticamente tratáveis. São eles: 1) Brennan-Schwartz (1982) e Longstaff-Schwartz (1992). Estes autores partem de um modelo de equilíbrio geral da economia e então derivam um modelo de estrutura a termo na qual há uma volatilidade estocástica.²

2 Um modelo ainda mais geral foi desenvolvido por HEATH, JARROW & MORTON (1992) e é conhecido por 'modelo HJM'.

Uma Abordagem Alternativa de Modelar Taxas de Juros Baseada num Método Semi-Empírico

Seja o passeio aleatório da taxa de juros dado por (1):

$$dr = m(r)dt + s(r)dX,$$

em que, como antes, $m(r)$ é o *drift* instantâneo e $s(r)$ o desvio padrão, mais uma vez **independentes do tempo**. O cerne do método descrito em (APABHAI *et alii*, 1995) consiste em obter empiricamente as estruturas do *drift* e do desvio padrão da taxa, a partir de dados históricos. No que segue, mostraremos como isso pode ser feito, tomando como exemplo as taxas de juros do mercado brasileiro.

II. APLICAÇÃO

Nesta seção, ao invés de explicar em detalhes o método de Apabhai e outros, achamos por bem descrever o cerne da metodologia juntamente com uma aplicação. Os detalhes podem ser encontrados em (APABHAI *et alii*, 1995) e nas referências ali contidas.

A Estrutura da Volatilidade da Taxa de Juros, $s(r)$

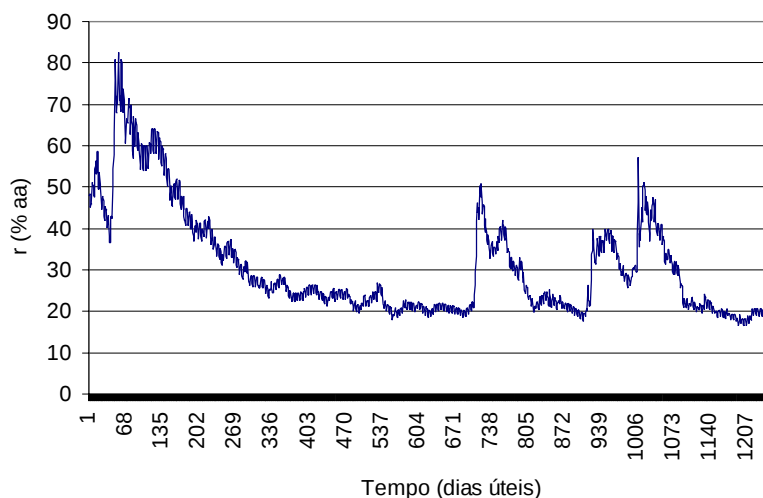
Séries Temporais para r e $(\delta r)^2$

Para o período³ compreendido entre 01/01/95 e 31/12/99 foram tomadas as taxas de juros⁴ praticadas no mercado brasileiro. Estas taxas estão mostradas na Figura I.

3 A escolha do referido período foi motivada por ser este um 'divisor de águas' na história econômica brasileira, resultado do advento do Plano Real, em meados de 1994.

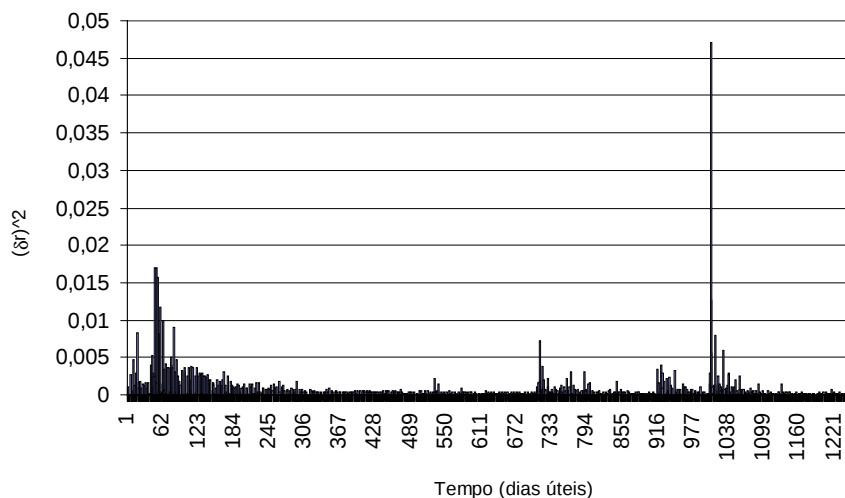
4 Instrumento SWAP DII X PRÉ – 30, publicado pela Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F).

FIGURA I - EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA TAXA DE JUROS (ANUAL) NO PERÍODO 01/01/95-31/12/99



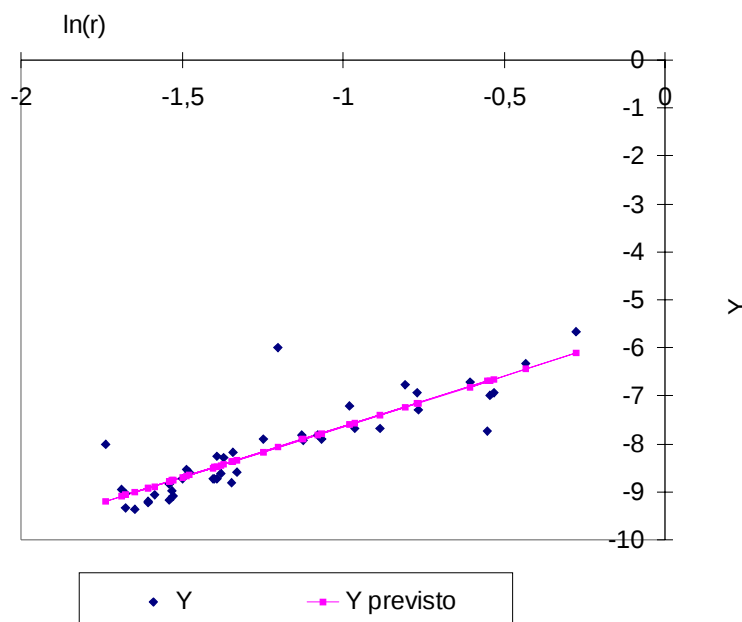
A partir da série histórica para r , o próximo passo é a obtenção da série para $(\delta r)^2$, a qual pode ser construída simplesmente fazendo-se a diferença entre os valores da taxa de dois dias consecutivos e elevando-se o resultado ao quadrado (Figura II).

FIGURA II - VARIAÇÃO DIÁRIA DA TAXA DE JUROS (01/01/95-31/12/99)



De acordo com o método de Apabhai-Wilmott, $s(r)$ é obtido a partir de uma regressão do comportamento do valor esperado de $(\delta r)^2$ (que será denotado aqui por $\langle (\delta r)^2 \rangle$), em função de r , já que é assumido de antemão que $s(r)$ é independente do tempo. Para encontrar a dependência entre $\langle (\delta r)^2 \rangle$ e r o procedimento é o seguinte: divide-se a série temporal para $(\delta r)^2$ em blocos, resultando num número suficiente de dados agrupados. A seguir, encontra-se a média aritmética dos valores de $(\delta r)^2$ em cada bloco, obtendo-se $\langle (\delta r)^2 \rangle$ no intervalo. Obtida essa quantidade para cada bloco, os resultados são, a seguir, plotados em função do valor de r no ponto médio do intervalo. A Figura III mostra essa plotagem, juntamente com um ajuste linear (as estatísticas da regressão encontram-se no Apêndice B).

FIGURA III - AJUSTE LINEAR $(Y = \ln[\langle (\delta r)^2 \rangle])$



Da equação (1), $\langle (\delta r)^2 \rangle$ pode ser escrita como:

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = (s(r))^2 \cdot \delta t \quad (3)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados dessa última equação temos:

$$\ln(\langle (\delta r)^2 \rangle) = 2 \cdot \ln(s(r)) + \ln \delta t \quad (4)$$

Se δt é escolhido como 1, a equação anterior fica:

$$\ln(\langle (\delta r)^2 \rangle) = 2 \cdot \ln(s(r)) \quad (5)$$

Da regressão linear,

$$\ln(\langle (\delta r)^2 \rangle) = a + b \ln r \quad (6)$$

e, portanto, tendo em vista (5),

$$\ln(s(r)) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \ln r \quad (7)$$

ou,

$$s(r) = e^{a/2 + (b/2) \ln r} \quad (8)$$

ou ainda,

$$s(r) = v \cdot r^\gamma \quad (9)$$

que é a expressão para a volatilidade da taxa de juros, com

$$\begin{aligned} v &\equiv e^{a/2} \\ e \\ \gamma &\equiv \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

em que a e b são obtidos do ajuste linear feito anteriormente (a é o coeficiente linear da reta ajustada e b o coeficiente angular).

Do ajuste efetuado temos: $a = -(5,537 \pm 0,24)$ e $b = (2,109 \pm 0,19)$ (Apêndice B). Portanto,

$$\begin{aligned} v &\approx 0.063 \pm 0.008 \\ e \\ \gamma &\approx 1.055 \pm 0.095 \end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, a expressão para a volatilidade da taxa de juros poder ser escrita como:

$$s(r) = 0,063 \cdot r^{1,055} \tag{12}$$

Estrutura do 'Drift' da Taxa de Juros

Diferentemente do caso da volatilidade, a estrutura do '*drift*' da taxa de juros - o termo $m(r)$ - não pode ser obtida somente a partir dos dados históricos. A maneira alternativa de se fazer uma estimativa do '*drift*' que seja satisfatoriamente consistente com os dados históricos, utilizada pelo método de Apabhai e outros (1995) é por meio da conhecida equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (s^2 \cdot p) - \frac{\partial}{\partial r} (m \cdot p) \tag{13}$$

em que s e m são como antes, r é uma variável aleatória (no nosso caso, a taxa de juros) e p é a função densidade de probabilidade para o processo estocástico.

Como se vê pela equação anterior, para a determinação de m é necessário que sejam conhecidos s e p . s já foi calculado empiricamente na seção anterior. Quanto a p , novas hipóteses são necessárias: a mais rigorosa é

que p é **estacionária** (independente do tempo); para a outra, analisaremos duas situações:

1. p é lognormal, ou seja,

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha r} \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \right) \cdot \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \quad (14)$$

2. p é 'log-logística', ou seja,

$$p = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}}{\left[1 + e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})} \right]^2} \quad (15)$$

expressões nas quais α , b e $\bar{r}$ são parâmetros a serem determinados em consonância com os dados históricos.

Conhecendo-se p e s pode-se determinar o 'drift' m . Da estacionariedade,

$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, a equação (13) fica:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (s^2 \cdot p) = \frac{\partial}{\partial r} (m \cdot p) \quad (16)$$

Integrando ambos os lados da equação anterior, tendo em vista que todas as quantidades são funções apenas de r , temos:⁵

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (s^2 \cdot p) \right\} \cdot dr &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (m \cdot p) \right\} \cdot dr \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (s^2 \cdot p) &= m \cdot p \Rightarrow \end{aligned} \quad (17)$$

5 As constantes de integração podem ser assumidas zero, sem maiores consequências. (OZTUKEL & WILMOTT, 1998)

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2p} \frac{\partial}{\partial r} (s^2 \cdot p) \quad (18)$$

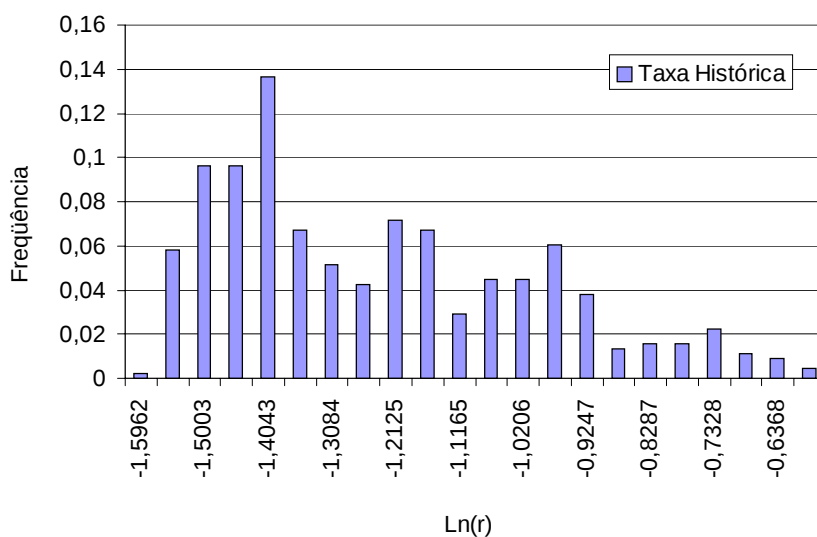
que permite calcular facilmente o 'drift', tendo-se em conta (12) e (14). Efetuando-se as operações indicadas (Apêndice A) para os casos 1 e 2, temos, respectivamente:

$$m(r) = v^2 \cdot r^{(2\gamma-1)} \left[\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right] \quad (19)$$

$$m(r) = v^2 \cdot r^{(2\gamma-1)} \left[\gamma + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \cdot \left(1 + e^{-\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})} \right)^{-1} \right] \quad (20)$$

Para calcular o 'drift' pelas expressões anteriores, resta-nos avaliar os parâmetros α , b e $\bar{r}$. Para tanto, seja o histograma de taxa de juros real do período analisado (Figura IV).

FIGURA IV - HISTOGRAMA (NORMALIZADO) DA TAXA (ANUAL) DE JUROS NO PERÍODO 01/01/95-31/12/99



Os parâmetros anteriores podem ser avaliados por diversos métodos. Aqui usaremos o Método dos Mínimos Quadrados. Os resultados dos ajustes efetuados são mostrados a seguir.

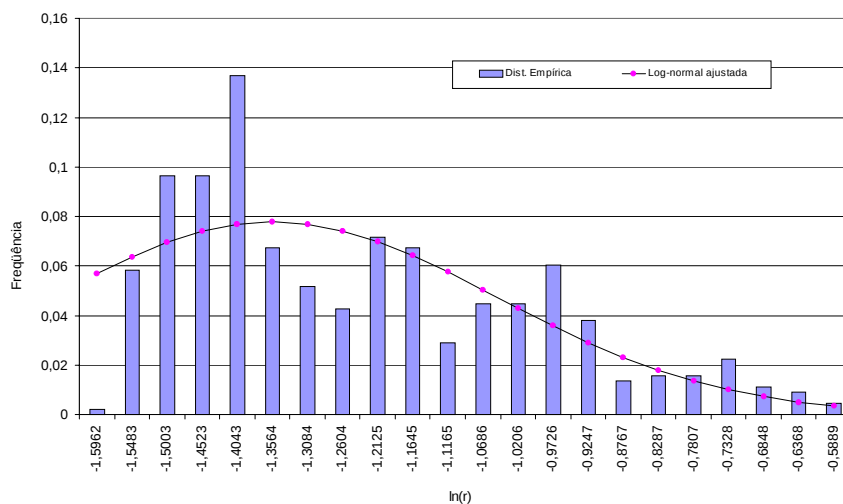
Caso 1. p é lognormal

Neste caso,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 0.258 \\ e \\ \alpha &= 0.3070 \end{aligned} \quad (21)$$

A Figura V mostra o ajuste deste caso.

FIGURA V - HISTOGRAMA (NORMALIZADO) DA TAXA (ANUAL) DE JUROS NO PERÍODO 01/01/95-31/12/99 E LOGNORMAL AJUSTADA



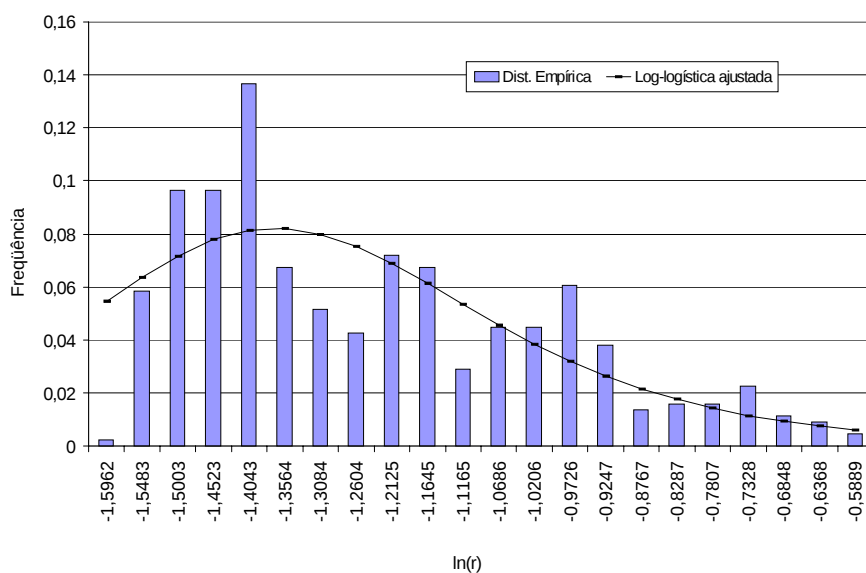
Caso 2. p é 'log-logística'

Agora,

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 0.239 \\ e \\ b &= 0.1752\end{aligned}\tag{22}$$

O ajuste é mostrado na Figura VI.

FIGURA VI - HISTOGRAMA (NORMALIZADO) DA TAXA (ANUAL) DE JUROS E LOGÍSTICA AJUSTADA NO PERÍODO 01/01/95-31/12/99



Evolução Temporal da Taxa de Juros

A equação de Fokker-Planck, (13), como vimos, fornece uma ferramenta poderosa para análise e previsão de importantes grandezas no contexto dos fenômenos de transporte. Nesta seção estamos particularmente interessados na evolução temporal da taxa de juros, dada uma taxa inicial. Para tanto, em consonância com nosso procedimento até aqui, é necessário obter a função densidade de probabilidade em qualquer instante posterior, dada uma distribuição inicial. Conhecendo-se os parâmetros m e s , isto pode ser obtido resolvendo-se (13). (APABHAI *et alii*, 1995)

Entretanto, essa tarefa não é das mais simples. Uma alternativa à equação de Fokker-Planck é resolver aproximadamente a equação estocástica para a taxa de juros por meio do 'método de discretização de Euler'. No que segue, vamos descrever tal método.

Seja a equação estocástica para a taxa de juros:

$$dr = m(r)dt + s(r)dX$$

O método de Euler consiste em escrever o incremento para r , δr , no intervalo de tempo δt , como segue:

$$\delta r = m(r)\delta t + s(r) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\delta t} \quad (23)$$

em que ε é uma variável aleatória obtida de uma distribuição normal-padrão. A atualização do valor de r em cada passo de tempo é:

$$r(t + \delta t) = r(t) + \delta r \quad (24)$$

Neste ponto, distinguiremos os dois casos discutidos anteriormente. Tendo em vista (9) e (19), a última expressão se escreve:

Caso 1:

$$r_t = r_{t-1} + v^2 \cdot r_{t-1}^{(2\gamma-1)} \cdot \left[\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \ln \left(\frac{r_{t-1}}{\bar{r}} \right) \right] \cdot \delta t + v \cdot r_{t-1}^\gamma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\delta t} \quad (25)$$

Caso 2:

$$r_t = r_{t-1} + v^2 \cdot r_{t-1}^{(2\gamma-1)} \cdot \left[\gamma + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \left(1 + e^{\frac{-1}{b} \ln(r/\bar{r})} \right)^{-1} \right] \cdot \delta t + v \cdot r_{t-1}^\gamma \cdot \varepsilon_L \cdot \sqrt{\delta t} \quad (26)$$

nas quais r_t é a taxa de juros no instante ' t ' e ε_t é uma variável aleatória obtida de uma distribuição logística de média 0 e desvio padrão 1.⁶

Como se vê, (22) fornece uma maneira recursiva de calcular r , muito apropriada para um cálculo à Monte Carlo. Na seção seguinte serão mostradas algumas trajetórias das taxas de juros obtidas dessa maneira.

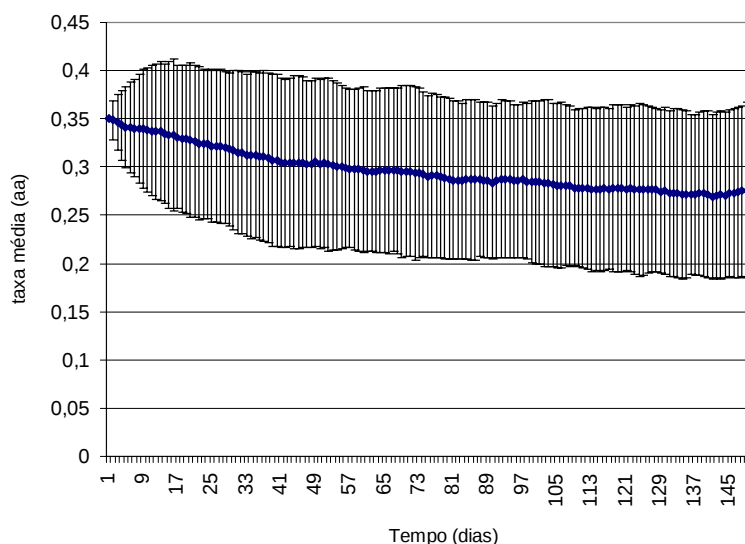
RESULTADOS DA COMPUTAÇÃO

Esta seção resume os resultados das simulações de Monte Carlo (equações 22 e 23).

As figuras que se seguem mostram a evolução da **taxa média**, bem como os desvios padrões correspondentes, para ambos os casos.

FIGURA VII- EVOLUÇÃO TEMPORAL DA TAXA DE JUROS MÉDIA (ANUAL) COM DESVIOS PADRÕES

(Taxa inicial = 0.35 a.a. (caso 1))



6 Por simplificação, estamos admitindo que o comportamento difusivo ordinário não é fortemente afetado se usamos a distribuição logística. Isso deve ser plausível para horizontes de tempo não muito grandes.

FIGURA VIII - EVOLUÇÃO TEMPORAL DA MÉDIA (A.A.) E DESVIOS PADRÕES

(Taxa inicial = 0.10 a.a. (caso 1))

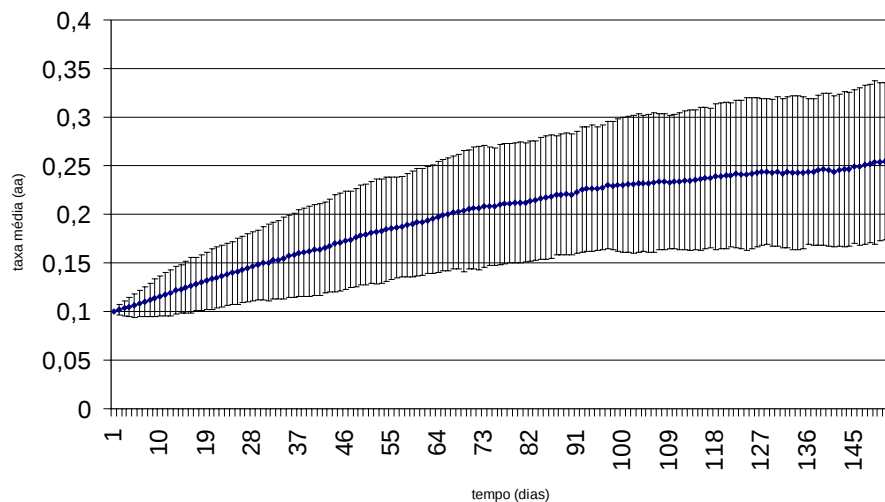


FIGURA IX - EVOLUÇÃO TEMPORAL DA MÉDIA (A.A.) E DESVIOS PADRÕES

(Taxa inicial = 0.35 a.a. (caso 2))

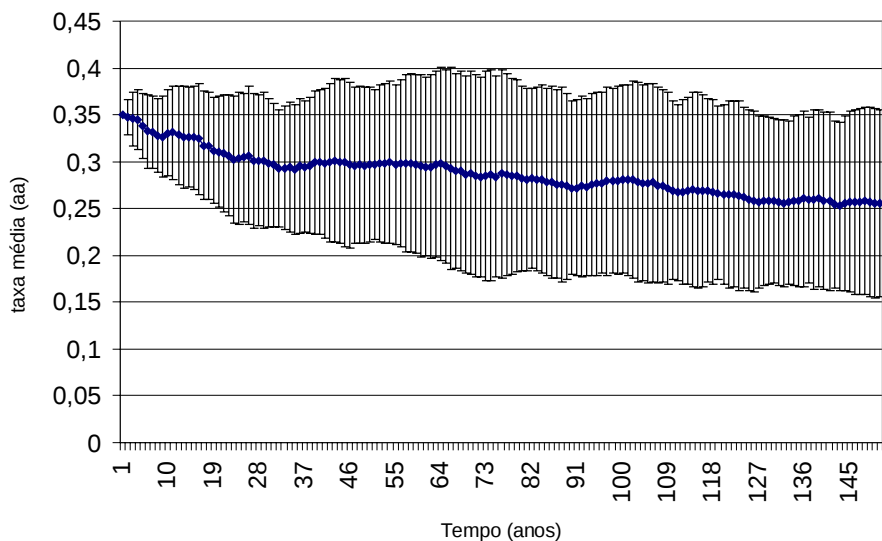
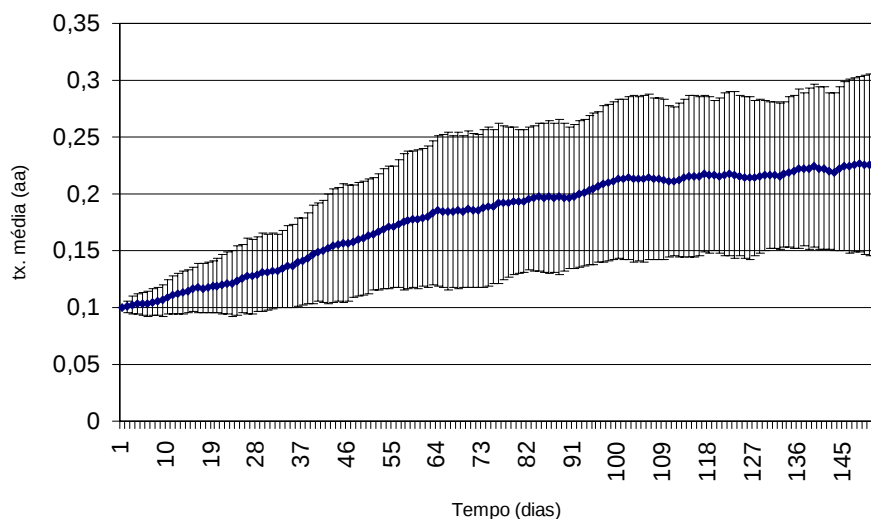


FIGURA X - EVOLUÇÃO TEMPORAL DA MÉDIA (A.A.) E DESVIOS PADRÕES

(Taxa inicial = 0.10 a.a. (caso 2))



A Reversão à Média

Uma das mais importantes características das taxas de juros, observada marcadamente sobretudo em mercados de países desenvolvidos, é a que diz respeito à tendência que as taxas apresentam de 'buscar' a média histórica de um período predeterminado, via de regra de alguns anos. Infelizmente, em mercados emergentes tal característica, embora presente, é mais difícil de ser observada devido à contínua intervenção dos agentes reguladores, às freqüentes mudanças na política econômica, às altas taxas de inflação, a um mercado muitas vezes dominado por poucos agentes, entre outras razões. Desse modo, não se pode ter a ilusão de que uma taxa de juros tomada como média num período possa ser considerada estável a ponto de ser utilizada como média num outro período, futuro ou passado. Com advento do Plano Real, em meados de 1994, foi inaugurada uma nova fase da economia brasileira, a da estabilização. Nos resultados obtidos a seguir admitimos tacitamente que essa estabilização

permite que estimativas de taxas de juros futuras possam ser feitas com relativa plausibilidade.

Podemos interpretar a taxa de reversão como a 'velocidade' de decrescimento/crescimento da taxa de juros (em direção à média). Como vimos na secção introdutória, seja a forma funcional do '*drift*' no modelo de Vasicek e Cox-Ingersoll-Ross:

$$m(r) = a(b - r) \quad (27)$$

Grosso modo, se b é a média histórica, a , por definição, é a **taxa de reversão**. Como vimos anteriormente, as simulações de Monte Carlo sinalizam para uma reversão da taxa de juros em direção à média do período, como se pode notar. Assumamos, assim, que, **em média**, a taxa de curto prazo no instante t possa ser escrita, aproximadamente, como:⁷

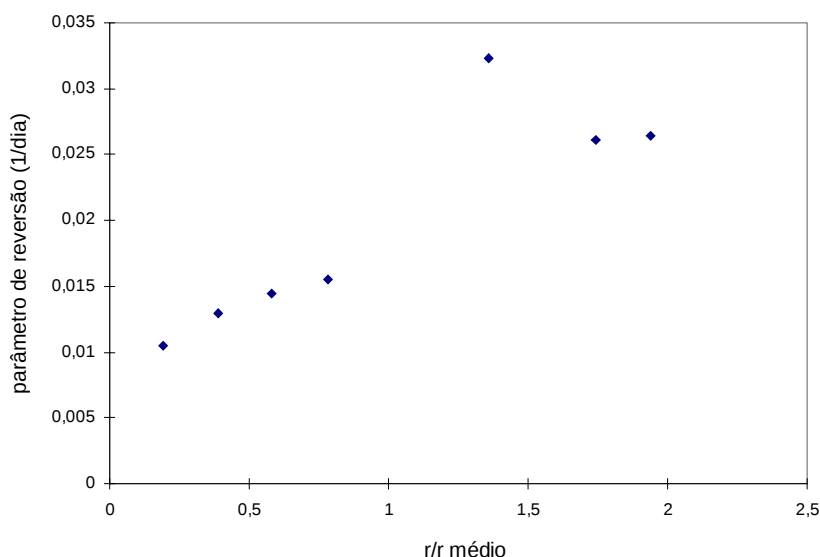
$$\bar{r}_t = \bar{r} - (\bar{r} - r) \cdot e^{-\lambda(r)t} \quad (28)$$

em que, **por simplificação**, $\lambda(r)$ é uma função somente de r (independente do tempo) e $\bar{r}$ é a média histórica. Admitamos, agora, que o método empírico que estamos utilizando forneça a estrutura temporal futura da taxa de juros de forma aproximadamente correta, a partir de uma dada taxa inicial, r . Então, podemos obter $\bar{r}_t$ calculando a média dos valores de r para cada cenário gerado via Monte Carlo e para cada passo de tempo. Comparando esse resultado ao termo ao lado direito de (28) podemos encontrar $\lambda(r)$ por meio de uma regressão (Apêndice C). A Figura XI mostra o comportamento de $\lambda(r)$:⁸

7 No modelo de Vasicek, por exemplo, $\lambda(r) = a = cte$.

8 Parece, contudo, que esses valores não são os mesmos para qualquer intervalo de tempo, como podemos facilmente verificar ao comparar o valor analítico com o obtido pelo método semi-empírico. De fato, como já havíamos dito, λ também depende do tempo.

FIGURA XI - O PARÂMETRO DE REVERSÃO À MÉDIA EM FUNÇÃO DE r , PARA O CASO 1



A respeito das propriedades de λ falaremos mais tarde (seção III).

A observação da figura parece sugerir um parâmetro de reversão médio para a situação em que as taxas de juros estão acima ou abaixo da taxa de juros média do período analisado (denotados, respectivamente, por $\lambda_>$ e $\lambda_<$). Nesta aproximação, os parâmetros são:

Caso 1: Log-normal

Caso 2: Logística

$$\lambda_< = 0,01332 \text{ dia}^{-1}$$

$$\lambda_< = 0,014 \text{ dia}^{-1}$$

e

e

$$\lambda_> = 0,02833 \text{ dia}^{-1}$$

$$\lambda_> = 0,014 \text{ dia}^{-1}$$

(29)

Para taxas muito próximas à média, o cálculo torna-se difícil nesta nossa implementação, em ambos os casos.

Uma informação interessante a respeito do parâmetro de reversão é que por meio dele pode-se determinar o tempo médio que uma taxa de juros acima ou abaixo da média leva para 'retornar' à média histórica. Esse tempo pode ser escrito como:⁹

$$\tau = \frac{1}{\lambda(r)} \ln \left(\frac{|r - \bar{r}|}{\varepsilon \cdot \bar{r}} \right) \quad (30)$$

em que ε é um número arbitrariamente pequeno que define o nível da aproximação à média.

A Tabela I resume alguns resultados.

9 Se $\bar{r}$ está muita próxima de r , então podemos escrever:

$$|\bar{r} - r| \approx \varepsilon \cdot \bar{r}, \text{ com } \varepsilon < 1$$

portanto, de (28),

$$\bar{r}_t = \bar{r} - \varepsilon \cdot \bar{r} \cdot e^{-\lambda(r)t}$$

Essa última equação pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \bar{r}_t - \bar{r} &= -\varepsilon \cdot \bar{r} \cdot e^{-\lambda(r)t} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\bar{r}_t - \bar{r}) &= -\varepsilon \cdot \bar{r} \cdot e^{-\lambda(r)t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(\bar{r} - \bar{r}_t)}{\varepsilon \cdot \bar{r}} &= e^{-\lambda(r)t} \Rightarrow \end{aligned}$$

Extraindo o ln de ambos os lados dessa última equação, temos,

$$\ln \left[\frac{(\bar{r} - \bar{r}_t)}{\varepsilon \cdot \bar{r}} \right] = -\lambda(r) \cdot t$$

Dessa última expressão é natural definir um tempo tal que:

$$\tau = \frac{1}{\lambda(r)} \ln \left(\frac{|r - \bar{r}|}{\varepsilon \cdot \bar{r}} \right)$$

que é a equação (30).

TABELA I

r	Log-normal		Logística	
	$\lambda(r)$	$\tau(\text{dias})$	$\lambda(r)$	$\tau(\text{dias})$
0.5	0.026486034	197.6247366	0.014451	363.3097
0.45	0.026150772	191.3080459	0,014486	346,6178
0.35	0.032365007	131.8444445	0,012872	333,7941
0.2015	0.015533637	243.3170336	-	
0.15	0.014409931	307.2526088	0,025000	176,6632
0.1	0.012897686	372.7763777	0,013567	354,0078
0.05	0.010449104	486.4432318	0,005716	888,8716

$e = 0.005$

Confrontações com Outras Simulações

No que segue, vamos discutir brevemente a confrontação de nossos resultados com outros estudos similares.

Silva (1999) estudou a dinâmica das taxas de juros de curto prazo no Brasil utilizando o 'Método Generalizado dos Momentos' de Hansen. A Tabela II mostra a transcrição dos principais resultados do autor (os símbolos originais foram alterados de sorte a que se tenha aqui a mesma nomenclatura), juntamente com os resultados do presente trabalho .

TABELA II - CONFRONTAÇÃO ENTRE OS MODELOS
(DESVIO PADRÃO ENTRE PARÊNTESES; N/D: NÃO-DISPONÍVEL)

Modelo	$\bar{r}$	λ	v	γ
Irrestrito	0,000752 (N/D)	0,0057 (N/D)	0,004 (N/D)	0,796 (N/D)
Vasicek-	0,000747 (N/D)	0,0056 (N/D)	0,00002 (N/D)	0
Jamishidian	(N/D)	(N/D)	(N/D)	
Cox-Ingersoll-	0,000699 (N/D)	0,0045 (N/D)	0,00056 (N/D)	0,5
Ross	(N/D)	(N/D)	(N/D)	
Brennan-	0,000783 (N/D)	0,0066 (N/D)	0,017 (N/D)	1
Schwartz	(N/D)	(N/D)	(N/D)	
Simulação Monte Carlo (irrestrito)	0,00061 ($\pm 0,00083$)	0,0081 ($\pm 0,0065$)	0,0047 ($\pm 0,00882$)	0,796 ($\pm 0,598$)
Este trabalho	0,00099 ($\pm 0,00035$)	0,01332 0,02833 0,01440 ($\pm 0,0016$)	0,063 ($\pm 0,008$)	1,055 ($\pm 0,095$)

Observações importantes:

1. Na última linha da tabela o valor 0.258 para $\bar{r}$ foi convertido em dias para facilitar a comparação.
2. Na última linha, 3ª coluna, colocam-se as médias das taxas de reversão como definidas anteriormente.
3. Silva utiliza a taxa diária média do CDI diário entre 30/05/95 e 21/03/97 (450 observações).

Comentários

Embora bastante coerentes entre si, pode-se notar alguma discrepância entre os resultados do presente trabalho e os de Silva (1999), sobretudo em relação aos parâmetros λ (taxa de reversão à média) e v (relacionado

à volatilidade). Em nossa opinião, esta discrepância está relacionada ao período usado como base de análise. De fato, o período usado por Silva é um período de relativa estabilidade da taxa (após uma queda - não muito rápida - de um patamar elevado). Isso explica o fato de a taxa de reversão ser substancialmente menor do que a obtida aqui. Segundo Silva, “... *pode-se dizer que a velocidade de reversão à média da taxa de juros do CDI é muito pequena. Uma explicação para este fato é que o mercado brasileiro de juros é de baixa volatilidade, o que implica pouco distanciamento das taxas de juros da sua média de longo prazo e conseqüentemente uma baixa pressão para que a taxa de juros reverta à média.*” É nossa opinião que a taxa de reversão que obtivemos, embora consistente com os dados históricos do período utilizado, está um pouco superestimada para representar uma característica do mercado de juros doméstico.

No que diz respeito ao parâmetro v , vimos que este está diretamente associado à volatilidade da taxa. Como o período analisado por Silva é de menor volatilidade do que o aqui utilizado, é de se esperar que o valor de v obtido pelo referido autor seja menor.

É oportuno lembrar que se levarmos em consideração o desvio padrão dos parâmetros calculados, os resultados aqui obtidos mostram-se plenamente equiparáveis aos de Silva, como podemos verificar facilmente confrontando as duas últimas linhas da Tabela 1.

Por outro lado, digno de nota é também o fato de que os parâmetros $\bar{r}$ (taxa média histórica) e γ obtidos por Silva não diferem muito dos valores aqui obtidos. Isso parece indicar que o expoente γ é aproximadamente igual a 1, o que nos leva a crer que, em princípio, o ‘melhor’ modelo para o caso brasileiro é o de Brennan-Schwartz.

Silva (1999) e também de La Roque (1996) (esta última utilizando o ‘Método Eficiente dos Momentos’) concluíram que não parece haver evidências empíricas fortes o suficiente para justificar o uso de modelos sofisticados de taxa de juros no Brasil. O método de Apabhai e outros (1995) aqui utilizado sinaliza para uma reversão à média bem definida, porém um tanto superestimada, esta última resultante do período

utilizado, em que há várias mudanças bruscas da taxa. O maior problema com que se defronta, então, para estudar a evolução das taxas de juros no Brasil é, a nosso ver, a carência de dados históricos representativos.

Confrontação com a Taxa Observada no Mercado

No que segue, confrontam-se os resultados da previsão do modelo aqui implementado com as taxas efetivamente observadas no mercado. Para tanto, tomamos as taxas do mesmo instrumento para o período (em dias úteis) compreendido entre 03/01/2000 e 07/08/2000 (150 observações). Os resultados da comparação são mostrados nas Figuras XII e XIII.

FIGURA XII - CONFRONTAÇÃO COM A TAXA REAL (ENTRE 05/01/00 – 08/03/00) (AS BARRAS DE ERRO CORRESPONDEM A 1 DESVIO PADRÃO)

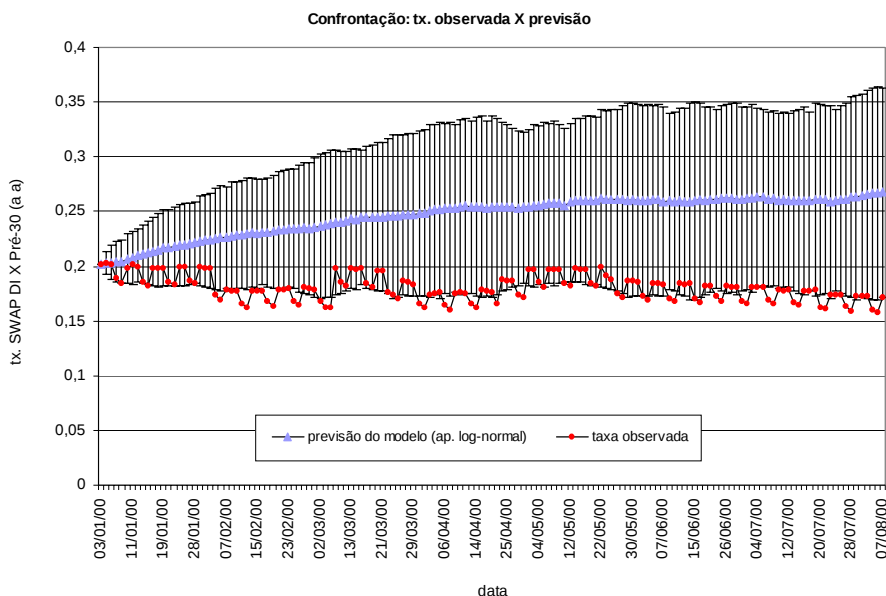
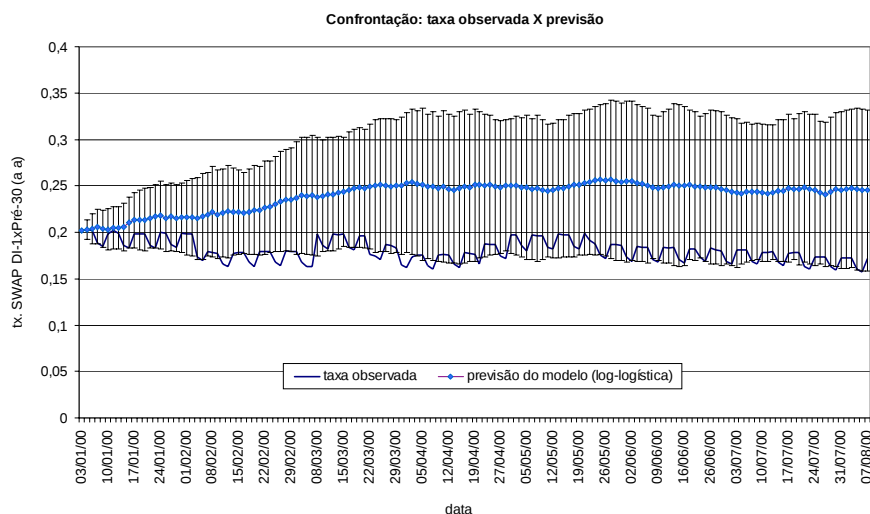


FIGURA XIII - CONFRONTAÇÃO COM A TAXA REAL (ENTRE 05/01/00 - 08/03/00) (AS BARRAS DE ERRO CORRESPONDEM A 1 DESVIO PADRÃO)



Em nossa opinião, essa confrontação com as taxas observadas atesta a plausibilidade do método aqui implementado, tendo em vista que, num nível de confiança usual, as taxas previstas são coerentes.

III. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Neste trabalho, nosso objetivo foi o de tentar estabelecer uma metodologia que pudesse ser útil para a estimativa de taxas de juros futuras no Brasil. Reforçando o que já é bem conhecido, podemos dizer que modelar taxas de juros é uma tarefa realmente complexa, sobretudo no mercado brasileiro. Entretanto, a despeito de suas singularidades, o nosso mercado também apresenta as características básicas observadas nos mercados mais evoluídos, notadamente quanto à tendência de reversão à média. Observando os resultados das simulações para vários níveis de taxa (Figuras VII, VIII, IX, X) essa característica se mostrou evidente. Outro ponto que nos parece digno de nota é o fato de que taxa de reversão não é simétrica em relação à média: se a taxa está a uma dada distância 'd', à direita da média, a sua taxa de reversão é maior do que a

de uma outra taxa, a mesma distância ' d ', à esquerda em relação à média (exceções acontecem se ' d ' é muito pequeno). Isso nos parece razoável, já que uma taxa de juros muito acima da média histórica representa uma situação de muito maior instabilidade do que aquela na qual a taxa está em um nível muito abaixo da média.

Quanto ao método básico de que fizemos uso (APABHAI *et alii*, 1995 e OZTUKEL & WILMOTT, 1998), deve-se ter em mente que a sua principal característica é buscar uma evolução temporal consistente com os dados históricos. Portanto, fatores 'externos' ao período utilizado como base de dados não são levados em conta na estimativa futura da taxa de juros, bem como as deficiências intrínsecas do método (principalmente estacionariedade da densidade de probabilidade)

A confrontação com a taxa observada leva a crer que o método é coerente com a observação empírica. A deficiência está, em nosso caso, na carência de dados históricos para análise, um problema crônico do mercado brasileiro. A consequência direta é que a taxa busca uma média de longo prazo, que é a média do período sob análise, que não corresponde à média de longo prazo característica do mercado doméstico (se existe). Para tanto, dever-se-ia considerar um horizonte de tempo bem maior, via de regra de mais de duas décadas, período esse que deveria, em princípio, 'conter' essa média. Entretanto, o uso de tão extenso horizonte de tempo é inviável, tendo-se em conta a recente história econômica brasileira. Para contornar esse problema de forma a tornar, tão-somente, o método mais efetivo em aplicações práticas, pode-se fazer um 'ajuste' *ad hoc* dos parâmetros $\bar{r}$ (média de longo prazo) e v (volatilidade).

A despeito dessas deficiências, a metodologia possibilitou, de forma razoavelmente simples, avaliar parâmetros difíceis de serem obtidos de outra forma, dentre eles a taxa de reversão à média e o expoente γ . Esse fato encoraja, em nossa opinião, a sua utilização para o mercado brasileiro.

REFERÊNCIAS

- APABHAI, M. Z.; CHOE, K.; KHENNACH, F.; WILMOTT, P. Spot-on modelling. *Risk Magazine* 11, Dec. 8, 1995.
- OZTUKEL, A.; WILMOTT, P. Uncertain parameters, an empirical stochastic volatility model and confidence limits. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1, 1998.
- CASSETTARI, A. Implementação de uma análise semi-empírica para a estimativa da volatilidade futura dos diversos fatores de risco. *Resenha BMF* n. 134, fev./mar. 2000.
- BLACK, F.; DERMAN, E.; TOY, W. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, Jan-Feb. 1990.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 17, n. 3, 1982.
- LONGSTAFFE, F. A.; SCHWARTZ, E. S. Interest rate volatility and the term structure: a two factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, v. 47, n. 4, 1992.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Bond pricing and the term structure of the interest rates: a new methodology. *Econometrica*, v. 60, n. 1, 1992.
- DE LA ROQUE, E. *Modelos não-lineares discretos e contínuos para a taxa de juros de curto prazo no Brasil*. 1996. Tese (Doutorado), PUC/RJ. Rio de Janeiro.
- SILVA, M. E. *Precificação de opções e futuros de taxas de juros no Brasil*. Terceiro Curso de Pós-Graduação em Derivativos BM&F, São Paulo, 1999. Apostila da disciplina 'Avaliação de Contratos de Opções'.
- HULL, J. *Options, futures and other derivatives*. 3ª ed. Prentice Hall, 1997.

APÊNDICE A

Derivação das Equações (19) e (20)

Para obter (19) temos de efetuar duas diferenciações, de acordo com a regra de diferenciação de produto:

$$\frac{d}{dr}(\beta^2 \cdot p_{est.}) = \beta^2 \cdot \frac{dp_{est.}}{dr} + p_{est.} \cdot \frac{d(\beta^2)}{dr} \quad (A1)$$

Tendo em vista (9) e (14), A1 fica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\beta^2 \cdot p_{est.}) &= \\ &= v^2 \cdot r^{2\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{r} \left(\exp \left\{ \frac{-1}{2\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \cdot \left(\frac{-1}{2\alpha^2} \right) \cdot 2 \cdot \ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \cdot \frac{1}{r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \right\} + 2\gamma v^2 r^{2\gamma-1} \cdot p_{est.} \end{aligned}$$

Reagrupando os termos e efetuando as operações indicadas,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\beta^2 \cdot p_{est.}) &= v^2 \cdot r^{2\gamma-2} \exp \left\{ \frac{-1}{2\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha^3} \ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ \frac{-1}{2\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \right\} + 2\gamma v^2 \cdot r^{2\gamma-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \alpha \cdot r} \exp \left\{ \frac{-1}{2\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{r}{\bar{r}} \right) \right]^2 \right\} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, tendo multiplicado esta última expressão por $\frac{1}{2p_{est.}}$, obtemos:

$$m(r) = v^2 \cdot r^{(2\gamma-1)} \left[\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \ln\left(\frac{r}{\bar{r}}\right) \right],$$

que é a equação (19).

Da mesma forma, para obtermos (20) temos, de (9) e (15), que (A1) torna-se agora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\beta^2 \cdot p_{est.}) &= v^2 \cdot r^{2\gamma-2} \left[\frac{1}{|b|} \cdot \frac{e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}}{\left(1 + e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}\right)^2} \left(\frac{1}{b} - 1 - \frac{2}{b} \cdot \frac{e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}}{\left(1 + e^{\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}\right)} \right) \right] + \\ &+ 2\gamma v^2 \cdot r^{2\gamma-2} \cdot \left(\frac{1}{|b|} \frac{e^{-\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}}{\left(1 + e^{-\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Novamente, multiplicando essa última expressão por $\frac{1}{2p_{est.}}$ obtemos:

$$m(r) = v^2 \cdot r^{(2\gamma-1)} \left[\gamma + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \cdot \left(1 + e^{-\frac{1}{b} \ln(r/\bar{r})} \right)^{-1} \right]$$

que é a equação (20).

APÊNDICE B

Neste Apêndice são mostrados os resultados da regressão linear da Figura III, obtida diretamente pelo “Microsoft Excel”.

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,872011551
R-Quadrado	0,760404144
R-quadrado ajustado	0,754414248
Erro padrão	0,476679806
Observações	42

ANOVA		
	gl	SQ
Regressão	1	28,84554
Resíduo	40	9,088945516
Total	41	37,93448552

	Coefficientes	Erro padrão
a=	-5,536650258	0,239411323
b=	2,109249343	0,187204093

MQ	F	F de significação
28,84554 0,22722364	126,9478	5,54699E-14

Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
-23,1261002 11,2671112	9,198E-25 5,547E-14	-6,020518397 1,73089591	-5,052782118 2,487602777	-6,020518397 1,73089591	-5,052782118 2,487602777

RESULTADOS DE RESÍDUOS

Observação	Y previsto	Resíduos
1	-6,660311629	-0,26713628
2	-6,115505994	0,442903306
3	-6,445278841	0,114716678
4	-6,816900244	0,116631092
5	-6,685615695	-0,31054783
6	-7,151740179	-0,14210462
7	-7,401875664	-0,28873977
8	-7,812128828	0,005813406
9	-7,781336319	-0,12533948
10	-8,365830687	0,201903409
11	-8,377964465	-0,42315442
12	-8,337787072	-0,26463024
13	-8,486154813	-0,24116222
14	-8,494711617	-0,22605972
15	-8,469144645	-0,25340763
16	-8,697031071	-0,02581834
17	-8,448073048	-0,16028971
18	-8,767073987	-0,21813256
19	-8,469991903	0,221486612
20	-9,091240832	0,136844534
21	-8,761228489	-0,33952001
22	-9,070861453	0,027374153
23	-8,786676817	-0,38051755
24	-8,918738437	-0,30000488
25	-7,160376273	0,219091231
26	-7,564246547	-0,12740894
27	-8,168100048	0,259413748
28	-8,655910154	0,062499322
29	-8,431366035	0,143253574
30	-6,696553918	-1,03501804
31	-9,200988573	1,189234264
32	-7,603776991	0,392369349
33	-7,909896674	-0,0139073
34	-8,071213256	2,065651616
35	-7,2383165	0,464805867
36	-7,911196674	0,101957435
37	-8,670770624	0,126956874
38	-8,780776815	-0,06330884
39	-8,919787032	-0,28183021
40	-9,006502719	-0,36618582
41	-8,882362208	-0,17370215
42	-9,068609184	-0,26497991

APÊNDICE C

Estimativa do Parâmetro de Reversão à Média

Para calcular a taxa de reversão à média vamos minimizar, por mínimos quadrados, a seguinte quantidade:

$$\min \left\{ [\bar{r}_t - MC(r, t)]^2 \right\} \quad (C1),$$

em que $\bar{r}_t$ é dado por (28) e $MC(r, t)$ é a média obtida pelo método de Monte Carlo para cada passo de tempo t .

Em (28), a taxa de reversão, $\lambda(r)$, é um parâmetro livre determinado a partir da minimização (C1).

e-mail: ailton.cassettarijr@sudameris.com.br

(Recebido em agosto de 2001. Aceito para publicação em março de 2002).