Seguro de Renda Temporária (Prêmio Médio)

Antonio Pereira do Amaral (*)

O objetivo deste estudo é procurar um método para se determinar o **prêmio médio** por unidade de capital devido ou a ser investido, por uma população de (X) pessoas.

Como exemplo, podemos citar:

i. Qual o prêmio a ser pago por uma pessoa de idade **x** pertencente à população (X), que se obrigou a pagar periodicamente uma prestação **P** para amortizar num certo prazo um capital **C**, a fim de que, se vier a falecer dentro do prazo de amortização da dívida, as prestações continuem a ser pagas pela seguradora ou seja sua dívida resgatada.

ii. Qual o prêmio a ser pago por uma pessoa de idade **x** pertencente à população (X) que resolveu investir periodicamente uma importância **P** para, no fim de um certo prazo, constituir um montante **C**, a fim de que, se vier a falecer dentro do prazo do investimento, este continue a ser feito.

Este estudo pode ser de grande utilidade para qualquer empresa que conceda empréstimos ou faça financiamentos a médio e longo prazo a um número grande de pessoas. É possível constituir-se, então, um fundo para resgatar os débitos deixados por clientes falecidos.

Suporemos que as idades da população (X) variam de uma idade inicial x_0 até uma idade limite x_w.

(*) O autor é Professor da Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo.

A solução deste problema pode ser obtida admitindo-se uma das duas hipóteses seguintes:

1.ª) Os prazos dos débitos ou investimentos são dados sempre em um número inteiro de anos, isto é, em 1 (um) ano, 2 (dois) anos, 3 (três) anos, etc., embora as prestações ou os investimentos possam ser mensais, bimensais, trimestrais, etc.

2.ª) O ano é dividido em k partes e os prazos serão sempre múltiplos de quaisquer destas partes.

1.ª HIPÓTESE

Sabemos que o valor atual, ou prêmio único, do seguro de uma renda anual **C**, fracionada em k partes e atribuída a uma pessoa de idade **x**, é dado pela expressão:

$$A = \sum_{t=o}^{n-1} \sum_{s=1}^{k} \frac{C}{k} \left(1 \quad {}_{t+\frac{s}{k}}p_x \right) v^{t+\frac{s}{k}}$$

ou

$$A = C \left[\sum_{t=o}^{n-1} \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} v^{t+\frac{s}{k}} - \sum_{t=o}^{n-1} \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} \quad {}_{t+\frac{s}{k}}p_x \, v^{t+\frac{s}{k}} \right]$$

A primeira soma é representada por $a^{(k)}_{\overline{n|}}$ e a segunda por $a^{(k)}_{x:\overline{n|}}$

Sabemos que:

$$a^{(k)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{i^{(k)}}\, a_{\overline{n|}} \quad e$$

$$a^{(k)}_{\overline{x:n|}} = a_{\overline{x:n|}} + \frac{k-1}{2k}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

Então, o valor atual é:

$$A = C\left(a^{(k)}_{\overline{n|}} - a^{(k)}_{\overline{x:n|}}\right) \quad \text{onde:}$$

k é o número de partes em que foi fracionado o ano;

n é o número de anos do prazo da renda;

$\frac{C}{k}$ é o termo da renda de cada kª parte do ano.

Seja $A_{x,s}$ o valor atual do seguro de todas as rendas atribuídas a todos os indivíduos de idade **x** com prazo de **s** anos.

Pelo que vimos acima, temos:

$$A_{x,s} = \left(a^{(k)}_{\overline{s|}} - a^{(k)}_{\overline{x:s|}}\right) C_{x,s}$$

onde $C_{x,s}$ é a soma de todas as rendas atribuídas a todos os indivíduos de idade **x** com prazo de **s** anos.

Fazendo variar s de 1 até m, temos:

$$A_{x,1} = \left(\overset{(k)}{a}_{\overline{1|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x:1|}} \right) C_{x,1}$$

$$A_{x,2} = \left(\overset{(k)}{a}_{\overline{2|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x:2|}} \right) C_{x,2}$$

$$A_{x,m} = \left(\overset{(k)}{a}_{\overline{m|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x:m|}} \right) C_{x,m}$$

Fazendo variar x de x_0 até x_w em todas essas igualdades e somando todas as igualdades assim obtidas, teremos o valor atual do seguro de todas as rendas da população (X).

Designando por A esse valor atual, temos:

$$A = \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{s=1}^{m} A_{x_o + t,s}$$

ou

$$A = \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{s=1}^{m} \left[\overset{(k)}{a}_{\overline{s|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x_o + t:s|}} \right] C_{x_0 + t,s}$$

Seja α o prêmio médio a ser exigido, em cada k^a parte do ano, de cada segurado, em cada unidade de **C** para segurar a sua renda.

O valor atual dos prêmios a receber das pessoas de idade x, cuja renda tem prazo s, será:

$$p\, A_{x,s} = k\alpha\, C_{x,s}\, \overset{,,(k)}{a}_{\overline{x:s|}}$$

Fazendo variar s de 1 a **m**, temos:

$$p\ A_{x,1} = k\alpha\, C_{x,1}\ \overset{,,(k)}{a}_{\overline{x:1|}}$$

$$p\ A_{x,2} = k\alpha\, C_{x,2}\ \overset{,,(k)}{a}_{\overline{x:2|}}$$

$$p\ A_{x,m} = k\alpha\, C_{x,m}\ \overset{,,(k)}{a}_{\overline{x:m|}}$$

Fazendo, novamente, variar **x** de x_0 até x_w em todas essas igualdades e somando todas as igualdades assim obtidas, teremos o valor atual de todos os prêmios.

Representando esse valor atual por pA, temos:

$$p\ A = \sum_{t=o}^{x_w - x_0} \sum_{s=1}^{m} k\alpha\, C_{x_0+t\ s}\ \overset{''(k)}{a}_{\overline{x_0+\ t:s|}}$$

ou

$$p\ A = k\alpha \sum_{t=o}^{x_w - x_0} \sum_{s=1}^{m} C_{x_0+t\ ,\ s}\ \overset{''(k)}{a}_{\overline{x_0+t:s|}}$$

Como, para a determinação do prêmio, pA deve ser igual a A, temos:

$$k\alpha \sum_{t=o}^{x_w - x_0} \sum_{s=1}^{m} C_{x_0+t\ ,s}\ \overset{''(k)}{a}_{\overline{x_0+t:s|}} =$$

$$= \sum_{t=o}^{x_w - x_0} \sum_{s=1}^{m} C_{x_0+t\ ,s} \left(\overset{(k)}{a}_{\overline{s|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x_0+\ t:s|}} \right)$$

ou

$$\alpha = \frac{\sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{s=1}^{m} C_{x_o+t,s} \left(\overset{(k)}{a}_{\overline{s|}} - \overset{(k)}{a}_{\overline{x_o+t:s|}} \right)}{k\alpha \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{s=1}^{m} C_{x_o+t,s} \overset{,,(k)}{a}_{\overline{x_o+t:s|}}}$$

2.ª HIPÓTESE

Nesta hipótese admitiremos que o número de mortos de cada idade, apresentados pela tábua de mortalidade, se distribua uniformemente dentro de cada ano. Assim, o número de mortos em cada k^a parte do ano, em cada idade, é a k^a parte dos mortos do ano. Esta suposição também foi feita na 1.ª hipótese, embora não explicitamente, porém não foi utilizada da mesma maneira como o será agora.

Se aceitarmos essa suposição, poderemos construir uma tábua de mortalidade de período $\frac{1}{k}$ do ano, em substituição à tábua de período anual.

Nestas condições, o valor atual do seguro de uma renda de valor **C**, para cada k^a parte do ano e atribuída a uma pessoa de idade **x**, pode ser expressa do seguinte modo:

$$A_{x,m} = \sum_{s=1}^{m} C \quad (1 - {}_sp_x)v^s$$

$$A_{x,m} = C \sum_{s=1}^{m} \quad (1 - {}_sp_x)v^s$$

$$A_{x,m} = C \left(a_{\overline{m|}} - a_{\overline{x:m|}} \right)$$

onde:

1 — m é o prazo da renda em k^{as} partes do ano;

2 — **x** é a idade do segurado e, ao invés de variar de ano em ano, varia de $\frac{1}{k}$ do ano em $\frac{1}{k}$ do ano (de mês em mês, de semestre em semestre, etc.);

3 — a taxa de juros é a taxa da k^a parte do ano.

Fazendo variar m de 1 a n, temos:

$$A_{x,1} = C_{k,1} \left(a_{\overline{1|}} - a_{\overline{x:1|}} \right)$$

onde $C_{x,1}$ é o total dos termos das rendas atribuídas a todos os indivíduos x, com prazo de $\frac{1}{k}$ do ano.

$$A_{x,2} = C_{x2} \left(a_{\overline{2|}} - a_{\overline{x:2|}} \right)$$

$$A_{x,3} = C_{x,3} \left(a_{\overline{3|}} - a_{\overline{x:3|}} \right)$$

$$A_{x,n} = C_{x,n} \left(a_{\overline{n|}} - a_{\overline{x:n|}} \right)$$

O valor atual do seguro da renda de toda a população será então:

$$A = \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o + t,m} \left(a_{\overline{m|}} - a_{x_o + \overline{t:m|}} \right)$$

Seja α o prêmio médio a ser exigido de cada segurado, em cada k^a parte do ano, por cada unidade **C** para segurar a sua renda.

O valor atual dos prêmios devidos pelos segurados de idade **x**, com renda de prazo **m**, será:

$$pA_{x,m} = \alpha\, C_{x,m} \sum_{s=o}^{m-1} {}_{s}p_{x}\, v^{s}$$

ou

$$pA_{x,m} = \alpha\, C_{x,m}\, \ddot{a}_{x:\overline{m|}}$$

onde $C_{x,m}$ é a soma das rendas de prazo **m** atribuídas a todas as pessoas de idade **x**.

Fazendo variar **m** de 1 a w, vem:

$$pA_{x,1} = \alpha\ C_{x,1}\ \ddot{a}_{x:\overline{1|}}$$

$$pA_{x,2} = \alpha\ C_{x,2}\ \ddot{a}_{x:\overline{2|}}$$

$$pA_{x,3} = \alpha\ C_{x,3}\ \ddot{a}_{x:\overline{3|}}$$

$$PA_{x,n} = \alpha\, C_{xn}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

A soma dos valores atuais de todos os prêmios para todas as idades será:

$$pA = \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} \alpha\, C_{x_o + t,m}\ \ddot{a}_{x_o + t:m|}$$

ou

$$pA = \alpha \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o+t,m} \ddot{a}_{x_o + t:\overline{m}|}$$

Como no início do contrato o valor atual dos prêmios deve ser igual ao valor atual dos capitais segurados, temos:

$$\alpha \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o+t,m} \ddot{a}_{x_o+ t:\overline{m}|} =$$

$$= \sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o + t,m} \left(a_{\overline{m}|} - a_{x_o+t:\overline{m}|} \right)$$

ou

$$\boxed{\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o + t,m} \left(a_{\overline{m}|} - a_{x_o+t:\overline{m}|} \right)}{\displaystyle\sum_{t=o}^{x_w - x_o} \sum_{m=1}^{n} C_{x_o + t,m} \ddot{a}_{x_o+ t:\overline{m}|}}}$$

Ambas as hipóteses apresentam vantagens e desvantagens.

Na primeira hipótese foi imposto que os prazos diferissem entre si por um número inteiro de anos. Ora, quando se trata, por exemplo, de investimentos ou prestações de período inferior a um ano, isso pode não ocorrer, ou melhor, raramente ocorre quando se tem um grande número de segurados.

Para utilizar, então, a fórmula obtida, teremos que arredondar os prazos aumentando ou diminuindo aqueles que não forem constituídos por um número inteiro de anos. Temos, ainda, que operar com idades inteiras, embora as rendas possam ser fracionadas.

Uma das vantagens consiste em que a quantidade de cálculos é bem menor que na segunda hipótese.

Na segunda hipótese será necessário construir uma tábua de mortalidade enorme, de período igual a $\frac{1}{k}$ do ano, a partir de uma tábua de mortalidade de período anual.

Nesta hipótese, a quantidade de cálculos é enorme, porque o número de grupos etários diferentes é k vezes o número de grupos da 1.ª hipótese.

Uma das vantagens reside na possibilidade de operar com idades fracionadas. Outra vantagem é que, após a elaboração da nova tábua de mortalidade, os cálculos são mais simples.