# Investimento e Poupança na Economia Aberta de Dois Setores

JOAQUIM ELÓI CIRNE DE TOLEDO(*)


## Resumo

Este artigo apresenta um modelo dinâmico, que tem como objetivo a análise de questões relativas à Balança de Transações Correntes. A estrutura de análise, ou *framework*, é um modelo de crescimento com otimização intertemporal, dentro de um horizonte de planejamento infinito. Considera-se uma economia aberta e "pequena", com dois setores (*tradeables* e *non-tradeables*). As decisões de investimento e poupança são explicitamente modeladas, tendo em vista suas ligações macroeconômicas com a Balança de Transações Correntes.


*O autor é Professor Assistente da FEA-USP e pesquisador da FIPE.*

(*) Este artigo é uma versão parcial do primeiro capítulo de minha dissertação de Doutorado no MIT (*Three Essays on Macroeconomic Policies in the Open Economy,* Departamento de Economia do MIT, Outubro de 1985). Agradeço o apoio financeiro do CNPq, da Fundação Ford, e ao Departamento de Economia do MIT. Agradeço a meu orientador, Rudi Dornbusch. Todos os erros e omissões restantes são meus.


## Abstract

This Essay considers the transfer problem, from te point of view of optimum control policies and in a descentralized, perfectly competitive economy. The framework is an infinite-horizon, intertemporal optimizing growth model in a small, two-sector (tradeables and non-tradeables) open economy. We show that the optimal response to both favorable and adverse external economic shocks always includes a change in the level and/or allocation of aggregate investment, and in the savings rate. Higher transfers abroad lead to increased aggregate investment and lower savings, therefore to a larger current account deficit. It is also shown that an adverse change in the (external) terms of trade leads to higher levels of output and net exports of traded goods.


## Introdução

Este artigo desenvolveu-se a partir de minha insatisfação em relação a algumas explicações que têm sido oferecidas para os grandes aumentos na dívida externa dos países subdesenvolvidos não produtores de petróleo desde 1973. Existe uma concordância geral de que esta "explosão" na dívida foi disparada pelos choques do preço do petróleo de 1973/74 e 1979/80. Por outro lado, parece-me que a crescente literatura[(1)]sobre este assunto não coincide com a maneira pela qual as pessoas nesses países viam o processo naquelas ocasiões.

Não sendo eu próprio um "crente" em "Expectativas Racionais", não argumentarei que a concordância com as percepções das pessoas poderia ser usada como um teste para as teorias econômicas. Todavia, neste caso em particular, minha intuição era a de que a opinião "popular" possuía alguns componentes bastante realistas e razoáveis. As aplicações do modelo desenvolvido neste artigo parecem dar crédito a tal conclusão.

Uma versão estilizada dessa "opinião popular", com referência à experiência brasileira, seria como segue. A curto prazo, argumentava-se, era "impossível" (ou "muito dispendioso") ajustar-se totalmente ao choque do petróleo, ou seja, manter o mesmo déficit em conta corrente anterior ao choque. As exportações e a substituição de importações não poderiam ser expandidas muito rapidamente devido a limitações ou inadequações da produção. A redução das importações de petróleo levaria a uma enorme perda de produção interna, visto que a economia não poderia substituir com facilidade o petróleo por outros insumos. Em outras palavras, a redução da produção de bens não comercializáveis (*non-tradeable*) era um modo muito dispendioso de "produzir" (ao não consumir) bens comercializáveis (*tradeable*) como petróleo. A única alternativa racional era alterar a estrutura da economia, e isto exigia investimentos. Reconhecia-se o elevado "valor" de investimentos que aumentassem as exportações líquidas, quer aumentando as exportações, quer substituindo as importações. Naturalmente, a conseqüência lógica desse raciocínio era que o "mercado interno" não deveria ser empurrado para uma recessão para se efetuar a necessária transferência (ou seja, os níveis de consumo não deveriam cair de maneira marcante). O choque do preço do petróleo deveria ser vencido, recorrendo-se ao endividamento externo.

Os modelos macroeconômicos de economia aberta disponíveis na literatura[(2)] pa-

(1) As referências no final deste artigo são uma boa amostra desta literatura.

(2) Existem dois diferentes ramos de literatura intimamente relacionados a nosso modelo. O primeiro, caracterizado por RYDER (1969), estuda a acumulação ótima sob as mesmas hipóteses adotadas por nós, porém em um contexto de economia fechada. Naturalmente, isto torna seu modelo inadequado para analisar problemas de conta corrente. O outro ramo, caracterizado por BRUNO (1976), DORNBUSCH (1983) e MARTIN & SELOWSKY (1984) utiliza, tal como nós, a estrutura de economia aberta de dois setores, porém, quer sem investimento, quer sem otimização. Discutimos abaixo cada um desses trabalhos.
BRUNO (1967) analisa as opções de política em uma estrutura de economia aberta de dois setores, mas sem otimização intertemporal. O apêndice desse trabalho mostra a formulação matemática de seu modelo com otimização intertemporal, porém com níveis de estoque terminal de capital e de dívida arbitrariamente escolhidos.
DORNBUSCH (1983) analisa o comportamento do consumo e da balança comercial em uma estrutura de economia aberta de dois setores, mas sem investimento. Portanto, como ele bem o sabe, seu modelo não é suficientemente "rico" para uma análise mais completa da conta corrente. MARTIN & SELOWSKY (1984) consideram o impacto de preços mais elevados de petróleo em uma estrutura similar à de DORNBUSCH (1983), mas onde as possibilidades de substituição na produção aumentam com o tempo.
Nenhum dos modelos acima parece ser capaz de explicar o comportamento das balanças comerciais dos LDCs após o primeiro choque do petróleo. Nessa ocasião, as importações líquidas dos LDCs, exceto o petróleo (como medidas por sua balança comercial com os países industrializados) aumentaram, ao passo que esses modelos previam que deveriam cair. Este trabalho apresenta a hipótese de que o comportamento dos investimentos é a chave que faltava.

recem incapazes de apreender esta idéia. O modelo desenvolvido aqui é uma tentativa de preencher esse vazio. A estrutura básica é um modelo de otimização intertemporal, com crescimento, de horizonte infinito. São consideradas duas classes de bens, *tradeables* e *non-tradeables.* Cada setor tem um estoque de capital específico (isto é, não-móvel), ao passo que a mão-de-obra é totalmente móvel. Supomos uma pequena economia aberta, em um mundo de mobilidade de capital (financeiro) perfeita.

O artigo é organizado como segue. A seção 1 delineia o modelo tradicional de otimização de um bem, com custos de ajuste (para investimento). A seção 2 desenvolve o modelo otimizador, em uma economia aberta de dois setores, para poupança e investimento, sob planejamento central. A seção 3 considera uma economia descentralizada, perfeitamente competitiva. A seção 4 estuda o equilíbrio no mercado de bens *non-tradeable.* Algumas observações finais concluem o artigo.

## 1. O Modelo de um Bem – Um Esboço

Consideraremos a versão apresentada em Blanchard & Fischer (1984, Cap. II). O problema é como maximizar o bem-estar, dado pelo valor presente descontado da trajetória da utilidade. De maneira algo restritiva (vide BLANCHARD & FISCHER, 1984, Cap. II, Seção III), supõe-se que a utilidade instantânea depende unicamente da taxa de consumo instantânea. Este é um país pequeno, de economia aberta, em um mundo de mobilidade de capital (financeiro) perfeita. A taxa de juros mundial é constante, e assumida como sendo igual(3) à taxa de preferência intertemporal do maximizador. Existem custos de ajuste, ou "de instalação" para os investimentos.

(3) A igualdade entre a taxa de preferência intertemporal do planejador (ou das famílias) e a taxa de juros mundial torna possível ao modelo alcançar um equilíbrio de estado estacionário. Caso contrário, o consumo e a riqueza cresceriam indefinidamente ou declinariam assintoticamente para zero. (Na verdade, bastaria supor que ambas as taxas tendem a um valor comum, à medida que o tempo – ou a riqueza, ou o consumo – aumenta).

Assume-se previsão perfeita (portanto, certeza) e um horizonte infinito. O último significa que existem pessoas de "vida infinita" ou, de maneira mais realista, famílias com uma preocupação quanto às gerações futuras.

O problema do planejador central, então, é o seguinte:

$$Max\ U_0 = \int_0^\infty u(c_t)\, e^{-\theta t}\, dt \qquad (1)$$

sujeito a

$$\dot{b}_t = c_t + i_t \left[\ 1 + \tau\,(i_t/k_t)\ \right] + \theta b_t - f(k_t) \qquad (2)$$

$$\dot{k}_t = i_t \qquad (3)$$

$$u'(.)>0 \qquad u''(.)<0$$

$$f'(\cdot)>0 \qquad f''(.)<0$$

$$\tau(0) = 0$$

$$\tau'(\cdot)>0$$

$$2\tau'(\cdot) + [\ i_t/k_t\ ]\,\tau''(\cdot)>0$$

Todas as variáveis são definidas em termos *per capita.* O índice *t* denota o valor da variável no período *t.* A notação é padrão:

$u(\cdot)$ utilidade instantânea
$c_t$ a taxa de consumo instantânea
$\theta$ taxa de desconto subjetiva, ou taxa de preferência intertemporal (tida como sendo igual à taxa de juros mundial, pelos motivos declarados acima).
$b_t$ dívida externa
$i_t$ investimento
$\tau(\cdot)$ função de custo de ajuste
$f(\cdot)$ função de produção (linear e homogênea)

Um ponto (·) sobre uma variável representa sua derivada no tempo.

Para tornar o problema não-trivial, impõe-se uma condição terminal de impossibilidade do "jogo-Ponzi":

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\theta t} b_t = 0 \qquad (4)$$

Podemos então derivar a restrição orçamentária intertemporal:

$$\int_0^{\infty} c_t e^{-\theta t} dt = \left\{ \int_0^{\infty} \left[ f(k_t) - i_t \left[ 1 + \tau(i_t/k_t) \right] \right] e^{-\theta t} dt \right\} - b_0 \qquad (5)$$

Aplicando o Princípio de Máximo, estabelecemos o Hamiltoniano para este problema. As condições necessárias e suficientes para otimização são:

$$u'(c_t) = \mu \qquad (6)$$

$$1 + \tau(i_t/k_t) + [i_t/k_t]\,\tau'(i_t/k_t) = q_t \qquad (7)$$

$$\dot{q}_t = \theta q_t - f'(k_t) - (i_t/k_t)^2 \tau'(i_t/k_t) \qquad (8)$$

$$\lim_{t \to \infty} q_t k_t e^{-\theta t} = 0 \qquad (9)$$

onde:

$q_t$ = valor marginal não descontado do capital (ou seu "preço sombra") no tempo $t$, em termos de bens.
A solução será dada por:

$$\dot{k}_t = i_t \qquad (10)$$

$$i_t = k_t \phi(q_t)\,;\ \phi(1) = 0\,;\ \phi'(\cdot) > 0 \qquad (11)$$

$$q_t = \int_t^{\infty} [f'(k_s) + (i_s/k_s)^2 \tau'(i_s/k_s)]\, e^{-\theta(s-t)} ds \qquad (12)$$

$$c_t = c_0 = \theta \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \left[ f(k_t) - i_t [1 + \tau(i_t/k_t)] \right] e^{-\theta t} dt - b_0 \right] \right\}$$

ou

$$c_t = c_0 = \theta W_0 \qquad (13)$$

onde:

$W_0$ = riqueza líquida no tempo $t = 0$

O resultado é que investimento e poupança e, portanto, o déficit em conta corrente, são independentes do nível inicial da dívida externa. Qualquer aumento na última deverá induzir uma queda imediata e proporcional no consumo, a única variável de ajuste.

## 2. O Modelo de Dois Setores, com Capital Específico: Otimização com Controle

Suponhamos uma economia que produza duas classes genéricas de bens, *tradeable* e *non-tradeable*. O capital é *pretty-clay*. Antes de ser instalado, um bem de capital pode ser usado em qualquer setor; contudo, após ter sido instalado, pode produzir somente uma classe de bens. Este é um país pequeno, de economia aberta, transacionando mercadorias (comercializáveis) e ativos financeiros com o resto do mundo. Os termos de troca (externos) estão dados. Os habitantes do país consomem apenas bens *non-tradeable*. Por outro lado, o investimento é feito apenas com bens *tradeable*. (Essas suposições não são essenciais. Se o consumo e/ou o investimento exigissem ambas as mercadorias, os resultados qualitativos não mudariam).

Para simplificar a análise, supomos a inexistência de depreciação de capital, tal como no modelo "tradicional" delineado acima, e nenhum crescimento populacional (novamente, essas suposições não são essenciais). Os custos unitários de instalação de investimentos são uma função do investimento agregado, relativamente ao estoque de capital de toda a economia(4) (o último, como *proxy* da dimensão absoluta da economia).

---

(4) COOPER & SACHS (1984) consideraram um modelo similar, onde o custo de instalação por unidade de investimento era uma função do investimento setorial, relativamente ao estoque de capital setorial. Esta hipótese não me parece muito realista. Se os custos de instalação aumentassem devido à interferência com a administração das firmas, então os mesmos deveriam ser específicos às firmas, e . . .

**O Modelo Formal**

$$C_t = Q^N{}_t = N(K^N{}_t, L^N{}_t) \tag{14}$$

$$Q^T{}_t = T(K^T{}_t, L^T{}_t) \tag{15}$$

$N(\cdot)$, $T(\cdot)$ são funções de produção (de retornos constantes de escala-CRTS), convencionais neoclássicas, mostrando todas as características padrão: as condições de Inada, e

$N(0,\cdot) = 0,\ T(0,.) = 0,\ N_i > 0,\ N_{ii} < 0,\ T_i > 0,\ T_{ii} < 0 \quad (i = K,L).$

$$L_t = L_o = L^N{}_t + L^T{}_t \tag{16}$$

$$K_t \equiv K^N{}_t + K^T{}_t \tag{17}$$

$$\dot{K}^N{}_t = I^N{}_t \tag{18}$$

$$\dot{K}^T{}_t = I^T{}_t \tag{19}$$

$$I_t \equiv I^N{}_t + I^T{}_t \tag{20}$$

$$B_t = I_t\ [\ 1 + \tau(I_t/K_t)\ ]\ + \theta\ B_t - T_t \tag{21}$$

$$\tau(0) = 0\ ; \tau'(\cdot) > 0$$

$$2\tau'(\cdot) + [\ I_t/K_t\ ]\ \tau''(\cdot) > 0$$

$$\lim_{t \to \infty} B_t\, e^{-\theta t} = 0 \tag{22}$$

Usamos $N$ para *non-tradeables* e $T$ para *tradeables*.

Integrando (21) "para diante", levando em conta (22), tem-se:

---

não específicos relativamente ao setor. Se os mesmos se originassem do lado da oferta (isto é, se houvesse um terceiro setor, "instalação de investimento"), então os mesmos deveriam abarcar toda a economia. Os custos de instalação de investimento específicos em termos de firma, juntamente com o CRTS, levariam a uma grande firma monopolística em cada setor, um resultado não muito atraente. Portanto, suporemos custos de instalação que dependem da escala agregada da economia.

$$\int_o^\infty I_t\ [\ 1 + \tau(I_t/K_t)\ ]\ e^{-\theta t}\, dt = \int_o^\infty T_t\, e^{-\theta t}\, dt - B_o \tag{23}$$

O objetivo do planejador central é supostamente a maximização do bem-estar, sujeito ao conjunto relevante de restrições:

$$Max\ U_o = \int_o^\infty U(C_t)\, e^{-\theta t}\, dt \tag{24}$$

sujeito a (14) a (19) e (23).

Começamos reescrevendo (24):

$$Max \int_o^\infty \{ U(C_t) \quad \mu_t\ [C_t \quad N_t\ ]\ + \omega_t \mu_t\ [\ L_o - L^N{}_t - L^T{}_t\ ]$$
$$\rho_t \mu_t\ [\ I_t \quad [\ 1 + \tau(I_t/K_t)\ ]\ \} - T_t\ ]]\ e^{-\theta t}\, dt \tag{25}$$

Sejam $\xi^N{}_t$ e $\xi^T{}_t$ os multiplicadores de Lagrange associados a (18) e (19). Define-se:

$$\xi^N{}_t \equiv \mu_t\, q^N{}_t\, e^{-\theta t} \tag{26}$$

$$\xi^T{}_t \equiv \mu_t\, q^T{}_t\, e^{-\theta t} \tag{27}$$

O Hamiltoniano para este problema é:

$$H_t = \{\ U(C_t) - \mu_t\ [\ C_t - N(K^N{}_t, L^N{}_t)]\ + \omega_t \mu_t\ [\ L_o - L^N{}_t - L^T{}_t\ ]$$
$$-\rho_t \mu_t\ [\ I_t\ [\ 1 + \tau(I_t/K_t)] - T(K^T{}_t, L^T{}_t)\ ]$$
$$+ \mu_t q^N{}_t I^N{}_t + \mu_t q^T{}_t I_t\ \}\ e^{-\theta t} \tag{28}$$

No Apêndice derivamos condições necessárias e suficientes para uma trajetória ótima. Entre outras, devemos ter as seguintes condições:

$$U'(C_t) = \mu_t \tag{29}$$

e

$\rho_t = [\,(\partial N/\partial L^N{}_t)/(\partial T/\partial L^T{}_t)\,]$ (a taxa-sombra de câmbio real[5]). (30)

---

(5) Definindo a taxa de câmbio real $\rho_t$, escrevemos as identidades de renda nacional (em termos de bens *non-tradeable):*

$Y = N(\cdot) + \rho T(\cdot) - \rho\ \theta\ B$

Definimos agora a taxa-sombra de juros real "interna", $r_t$:

$$r_t \equiv \theta + \dot{p}_t/p_t \equiv \theta + \hat{p}_t \tag{31}$$

A taxa de juros real interna é definida em termos do bem de consumo (*non-tradeable*); Portanto, a mesma é igual à taxa de juros real mundial menos a alteração percentual no preço relativo do bem de consumo. Naturalmente, esta é a taxa real relevante para decisões quanto a consumo(6).

Aplicando um resultado padrão (vide BLANCHARD & FISCHER, 1984, Capítulo II), obtemos:

$$[U'(\dot{C}_t)] / [U'(C_t)] = \theta - r_t \tag{32}$$

A partir de (29),

$$[U'(C_t)] \equiv U''(C_t)\, C_t = \mu_t \tag{33}$$

Usando (31) e (33), reescrevemos (32):

$$\mu_t/\mu_t = \theta \quad r_t = \theta - [\theta + \dot{p}_t/p_t] = \dot{p}_t/p_t \tag{34}$$

Ou seja, a utilidade marginal do consumo será crescente (o consumo está caindo) se a taxa de juros real (relevante para consumo) for inferior à taxa de preferência temporal (sendo a última, por suposição, igual à taxa de juros mundial). Isto ocorrerá se o preço relativo do bem de consumo, $1/p_t$, estiver aumentando, isto é, $\dot{p}_t < 0$.

Para referência futura, repetiremos aqui as condições relevantes derivadas no Apêndice:

$$U'(C_t) = \mu_t \tag{35}$$

$$\mu_t/\mu_t = -\dot{p}_t/p_t \tag{36}$$

$$\partial N/\partial L^N_t = \omega_t \text{ (o salário real-sombra)} \tag{37}$$

$$p_t = (\partial N/\partial L^N_t)/(\partial T/\partial L^T_t) = (\partial N/\partial K^N_t)/(\partial T/\partial K^T_t) \tag{38}$$

$$q^N_t = p_t \int_0^\infty \left\{ [(1/p_s)(\partial N/\partial K^N_s)] + [I_s/K_s]^2\, \tau'(\cdot) \right\} e^{-\theta(s-t)}\, ds \tag{39}$$

$$q^T_t = p_t \int_0^\infty \left\{ (\partial T/\partial K^T_s) + [I_s/K_s]^2\, \tau'(\cdot) \right\} e^{-\theta(s-t)}\, ds \tag{40}$$

$$\dot{q}^N_t = [\theta + (\dot{p}_t/p_t)]\, q^N_t - (\partial N/\partial K^N_t)\, p_t\, [I_t/K_t]^2\, \tau'(\cdot) \tag{41}$$

$$\dot{q}^T_t = [\theta + (\dot{p}_t/p_t)]\, q^T_t - p_t \left\{ (\partial T/\partial K^T_t) + [I_t/K_t]^2\, \tau'(\cdot) \right\} \tag{42}$$

$$q^N_t = q^T_t = q_t \tag{43}$$

portanto

$$\dot{q}^N_t = \dot{q}^T_t = \dot{q}_t \tag{44}$$

$$p_t \left\{ 1 + \tau(\cdot) + [I_t/K_t]\, \tau'(\cdot) \right\} = q_t \tag{45}$$

$$\dot{K}^N_t = I^N_t \tag{46}$$

$$\dot{K}^T_t = I^T_t \tag{47}$$

$$I^N_t + I^T_t = [K^N_t + K^T_t]\, \phi(q_t/p_t) \tag{48}$$

$$\phi(1) = 0\,;\ \phi'(\cdot) > 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t\, q^i_t\, e^{-\theta t} K^i_t = 0\,,\ i = N, T \tag{49}$$

$$\int_0^\infty I_t\, [1 + \tau(I_t/K_t)]\, e^{-\theta t}\, dt = \int_0^\infty T_t\, e^{-\theta t}\, dt - B_0 \tag{50}$$

---

$Y = C + S$

$B = I\,[1 + \tau(\cdot)] + \theta B - T(\cdot)$

$C = N(\cdot)$

$N(\cdot) + pT(\cdot) - p\,\theta\, B = C + S$

ou

$pT(\cdot) - p\,\theta\, B = S$

$p\dot{B} = p\, I[1 + \tau(\cdot)] + p\,\theta\, B - p\,T(\cdot)$

ou, em termos de nosso numerário (bens *non-tradeable*), CA déficit = (dispêndio em investimentos) – (Poupança)

(6) A identificação da taxa de juros real com base na cesta de consumo, como sendo a taxa relevante para decisões sobre consumo, foi feita anteriormente. Vide BRUNO (1976), DORNBUSCH (1983) e MARTIN & SELOWSKY (1984).

## Estado Estacionário e Dinâmica

Para analisar as propriedades de estado estacionário e dinâmicas do modelo, usamos primeiramente a suposição de CRTS para escrever:

$$N(K^N_t, L^N_t) = L^N_t \,.\, f(k^N_t) \tag{51}$$

$$T(K^T_t, L^T_t) = L^T_t \,.\, g(k^T_t) \tag{52}$$

No estado estacionário,

$$\dot{q} = \dot{q}^N = \dot{q}^T = \dot{k}^T = \dot{k}^N = \dot{\mu} = \dot{\rho} = \dot{C} = \dot{L}^N_t \quad \dot{L}^T_t = 0 \tag{53}$$

Portanto,

$$q^*/\rho^* = q^{N*}/\rho^{*} = q^{T*}/\rho^{*} = 1 \tag{54}$$

$$I^* = 0 \tag{55}$$

$$k^{N*}: \theta q^* = f'(k^{N*}) \quad \text{. ou} \quad \theta = f'(k^{N*})/\rho^* \tag{56}$$

$$k^{T*}: \theta q^* = \rho^* g'(k^{T*}) \quad \text{, ou} \quad \theta = g'(k^{T*}) \tag{57}$$

$$\omega^*/\rho^* = g(k^{T*}) - \theta\, k^{T*}$$

$$\omega^* = f(k^{N*} - \theta \rho^* k^{N*} \tag{58}$$

ou

$$\omega^*/\rho^* = f(k^{N*})/\rho^* - \theta\, k^{N*} \tag{59}$$

Para determinar $k^{T*}$ $k^{N*}$, e $\rho^*$, usamos o sistema dado por:

$$k^{N*} = f'^{-1}(\theta\rho^*) \tag{60}$$

$$k^{T*} = g'^{-1}(\theta) \tag{61}$$

$$\rho^* = f(k^{N*}) / \left\{ g(k^{T*}) + \theta\, [\, k^{N*} - k^{T*} ] \right\} \tag{62}$$

*A partir de (60), (61) e (62),* $k^{N*} = \beta(k^{T*})$ (60')

É fácil agora determinar a dinâmica dos preços de investimentos e de capital na vizinhança do estado estacionário. Linearizando-se (42) e (48) ao redor de $k^{T*}$ e $q^*/\rho^* = 1$,

$$\begin{bmatrix} \dot{k}^T \\ \\ (\dot{q/\rho}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\alpha/\delta)\, k^{T*} \phi'(1) \\ \\ -g''(k^{T*}) & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^T - k^{T*} \\ \\ (q/\rho) \quad 1 \end{bmatrix} \tag{63}$$

onde $\alpha \equiv I^T/I$, $\delta \equiv K^T/K$

De maneira não surpreendente, o resultado é exatamente igual ao do modelo de um bem (vide BLANCHARD & FISCHER, 1984, Cap. II, p. 34).

A dinâmica é caracterizada no diagrama de fase da figura 1. O *locus* $\dot{k}^T = 0$ é horizontal, em $q/\rho = 1$; o *locus* $(\dot{q/\rho}) = 0$ tem uma inclinação negativa. Como é usual, temos uma trajetória em "ponto de sela", *SS;* esta trajetória negativamente inclinada é a única trajetória ótima para a economia (Vide BLANCHARD & FISCHER, 1984, Cap. II).

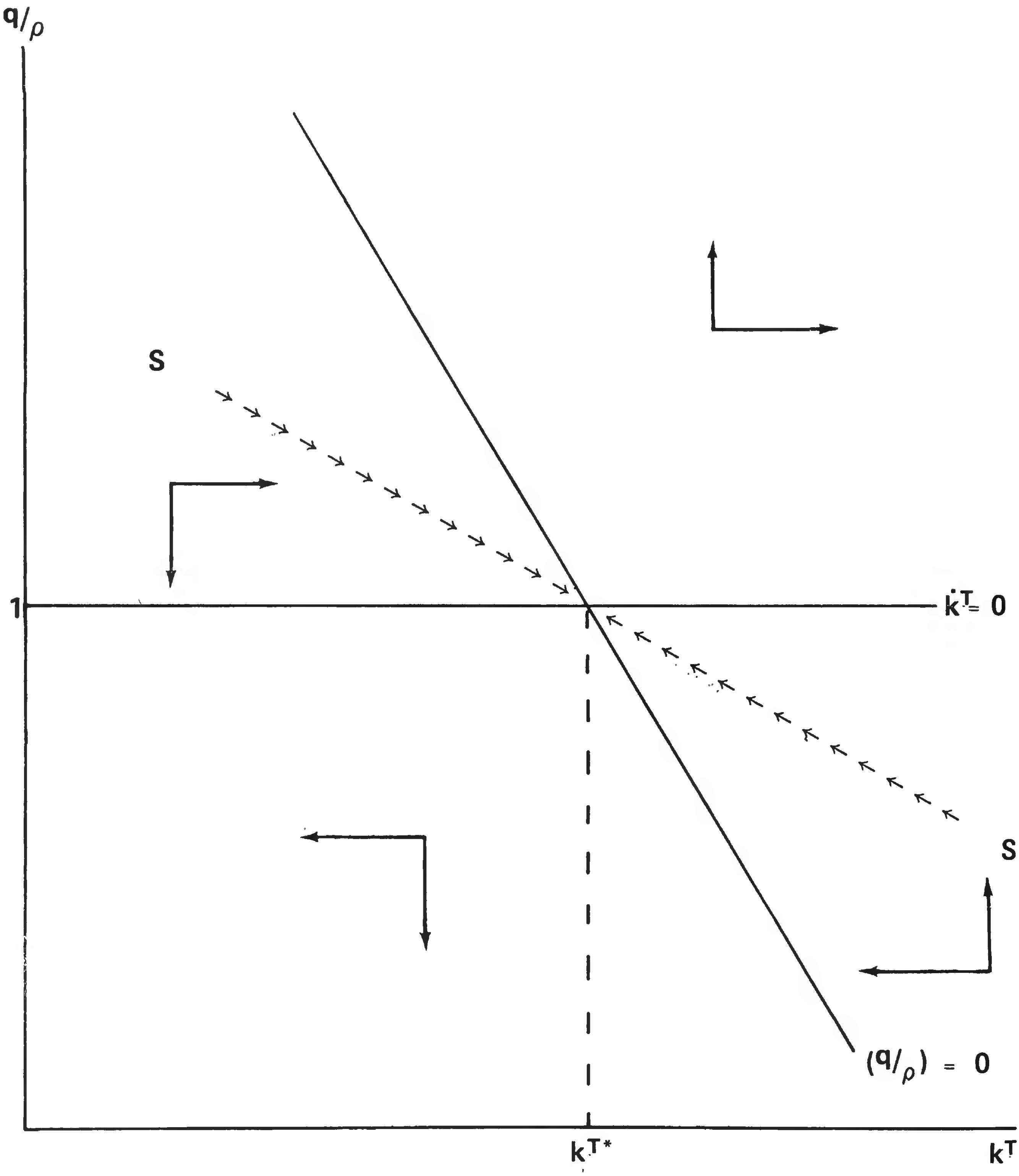
Os valores de estado estacionário de $k^{T*}$, $k^{N*}$ e $\rho^*$ são determinados conjuntamente pelas equações (60), (61), (62). Mostramos nas figuras 2 e 3 a solução geométrica deste sistema.

Na figura 2, supomos que os bens *tradeable* são sempre (isto é, para todas as razões salário/*rental*) *non-tradeable.* O resultado óbvio é que, ao longo do tempo, a taxa real de câmbio estará caindo. Isto é consistente com os modelos tradicionais estáticos de dois setores: nos países "mais ricos", o preço relativo de bens *non-tradeable* é mais elevado.

Por outro lado, a figura 3 mostra uma taxa real de câmbio aumentando ao longo do tempo. Este é o resultado lógico de serem os bens *non-tradeable,* neste caso, mais intensivos em capital.

As figuras 2 e 3 utilizam o fato de que, na trajetória ótima, as taxas de substituição marginais são equalizadas (Equação (38)). Isto nos permite mostrar que o valor ideal de $k^N$ é uma função crescente de $k^T$; e, à semelhança do teorema da equalização de

FIGURA 1




preços dos fatores de Samuelson (SAMUELSON, 1949), isto resulta em um caminho definido para a taxa real de câmbio. A cadeia de causação vem desde as razões capital-trabalho para os preços relativos fatoriais, e daí para os preços relativos dos bens. Para "fechar" o sistema, é preciso ainda encontrar o nível de consumo que determinará a alocação de mão-de-obra. Isto é feito com mais facilidade em uma estrutura de economia descentralizada, à qual passaremos agora.

FIGURA 2

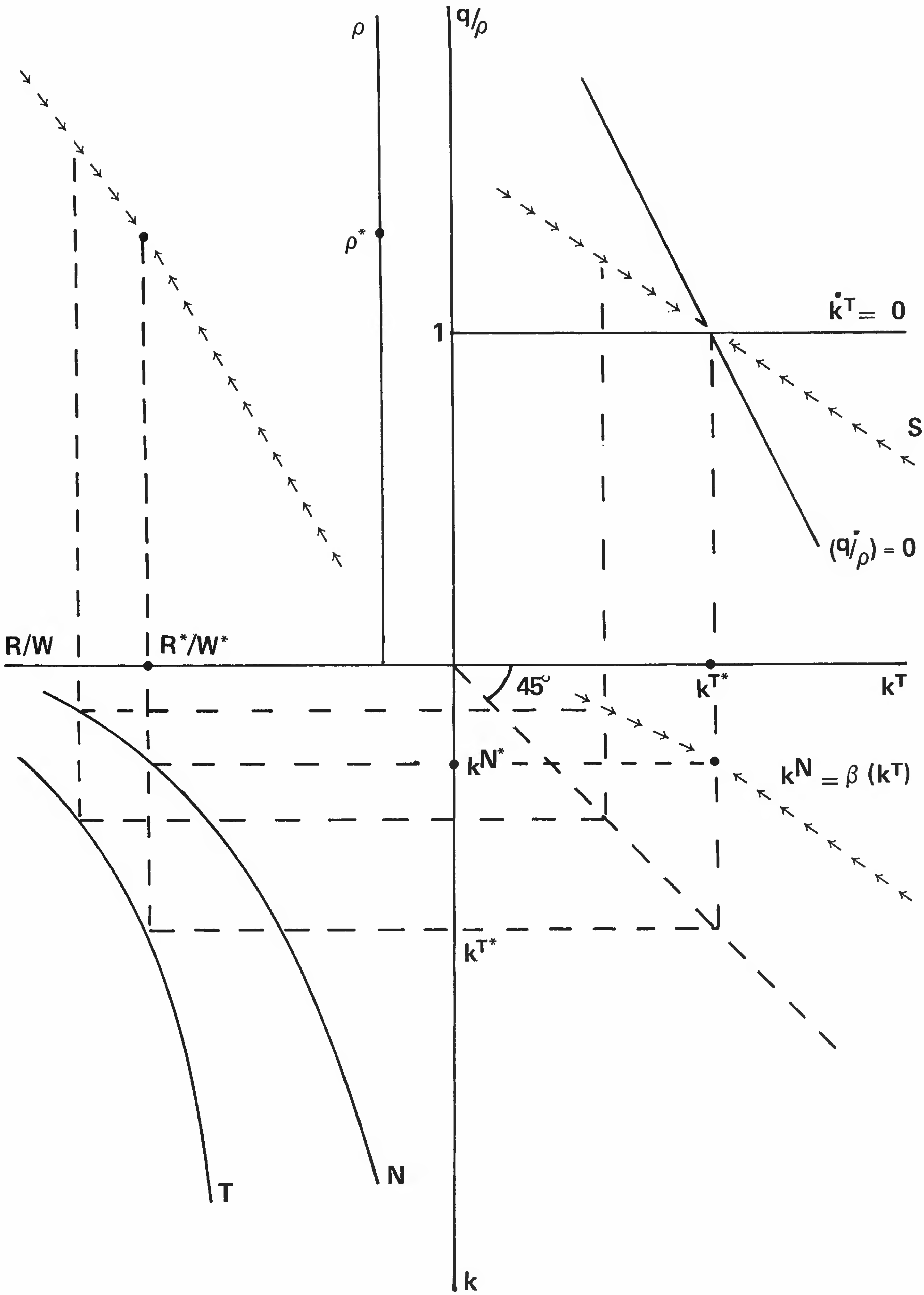
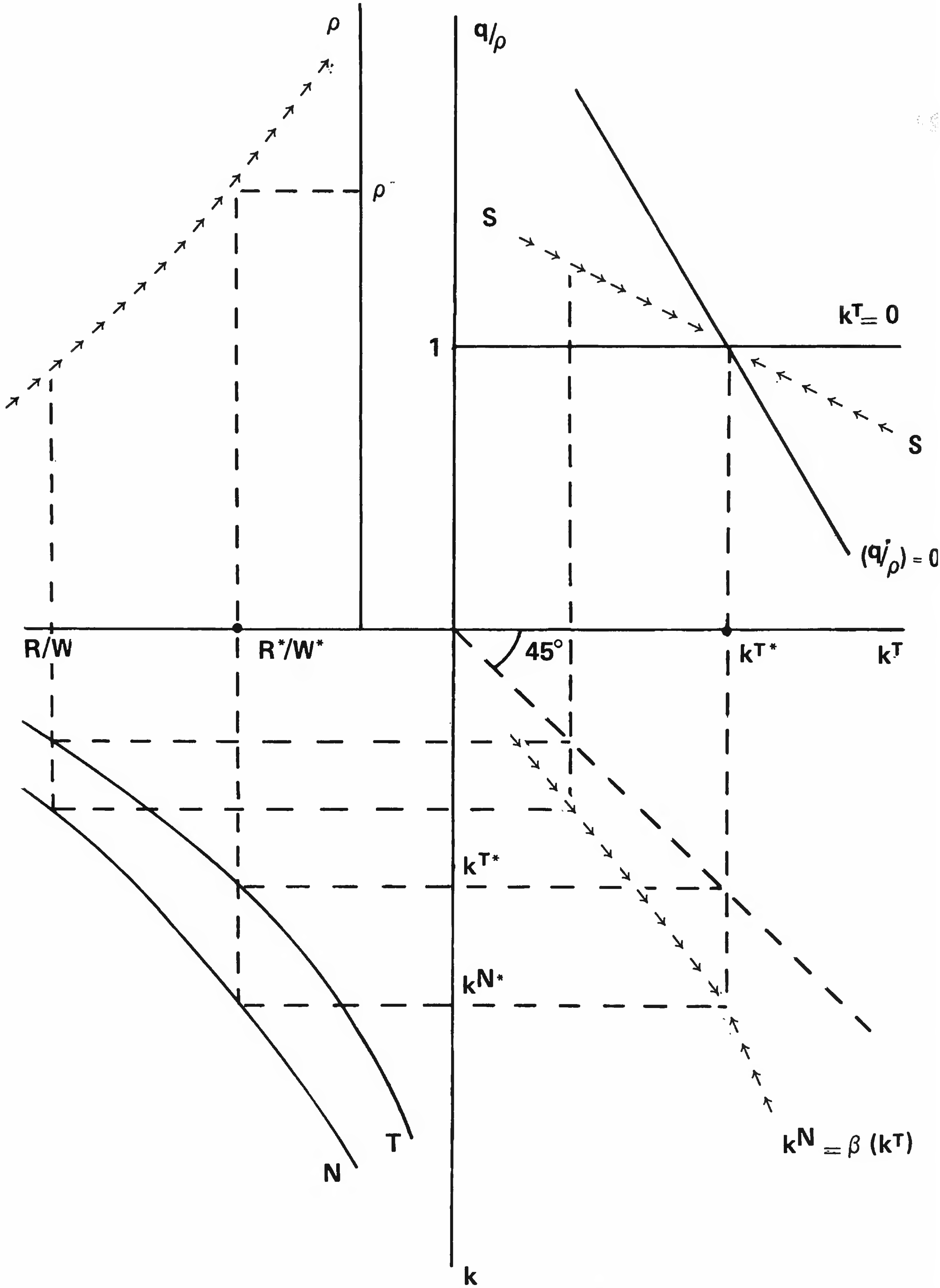


FIGURA 3



## 3. A Economia Descentralizada

Considere-se uma economia competitiva e descentralizada. Cada "família" vende sua mão-de-obra ao salário real vigente, $\omega_t$, e recebe dividendos das companhias nas quais é acionista. A família maximiza a mesma função de bem-estar (1). A taxa de juros real relevante, como dada por (31), é definida em termos do bem de consumo *(non-tradeable)*.

Suponhamos que as firmas atuam para maximizar seu patrimônio líquido, ou seja, o valor presente descontado dos fluxos de caixa. Como temos CRTS e uma economia competitiva, podemos agregar todas as firmas (como se tivéssemos uma grande empresa, porém atuando como uma firma perfeitamente competitiva). Dado o caminho (esperado) do salário real, da taxa de juros e do preço relativo dos bens, o problema da "empresa" é maximizar o valor presente de seu fluxo de caixa:

$$Max \int_0^{\infty} \Big\{(1/\rho_t)\, N(K^N{}_t, L^N{}_t) + T(K^T{}_t, L^T{}_t) \; (\omega_t/\rho_t)\; [L^N_t + L^T{}_t] \; [\, I^N{}_t + I^T{}_t \,] \; [1 + \tau (I_t/K_t)] \Big\}\, e^{-\theta t}\, dt \tag{64}$$

relativamente a

$$\{L^N{}_t, L^T{}_t, I^N{}_t, I^T{}_t\}$$

sujeito a

$$K^N{}_t = I^N{}_t \tag{65}$$

$$K^T{}_t = I^T{}_t \tag{66}$$

Vamos definir os multiplicadores de Lagrange associados às restrições acima como:

*para a Eq. (65): $(q^N{}_t/\rho_t)\, e^{-\theta t}$

*para a Eq. (66): $(q^T{}_t/\rho_t)\, e^{-\theta t}$

Derivando as condições para otimização no problema acima; obteremos:

$$\partial N/\partial L^N{}_t = \omega_t = \rho_t(\partial T/\partial L^T{}_t) \tag{67}$$

$$\rho_t \Big\{1 + \tau (I_t/K_t) + (I_t/K_t)\, \tau'(I_t/K_t)\Big\} = q^N{}_t = q^T{}_t = q_t \tag{68}$$

$$q^N{}_t = [\, \theta + (\hat{\rho}_t/\rho_t)\,]\, q^N{}_t - (\partial N/\partial K^N{}_t) - \rho_t [I_t/K_t]^2\, \tau'(I_t/K_t\;) \tag{69}$$

$$q^T{}_t = [\, \theta + (\hat{\rho}_t/\rho_t)\,]\, q^T{}_t \;\; \rho_t \Big\{(\partial T/\partial K^T{}_t) + (I_t/K_t)^2\, \tau'(I_t/K^t)\Big\} \tag{70}$$

$$\rho_t = (\partial N/\partial L^N{}_t)/(\partial T/\partial L^T{}_t) = $$

$$= (\partial N/\partial K^N{}_t)/(\partial T/\partial K^T{}_t) \tag{71}$$

$$\lim_{t \to \infty} q^N{}_t\, e^{-\theta t} K^N{}_t = 0 \tag{72}$$

$$\lim_{t \to \infty} q^T{}_t\, e^{-\theta t}\, K^T{}_t = 0 \tag{73}$$

Essas condições são exatamente similares às derivadas para o problema de otimização com controle centralizado (Equações (37) a (49)).

Passemos agora ao problema de maximização da "família" Seguindo Blanchard & Fischer (1984), suporemos que as firmas financiam investimentos através de lucros retidos; portanto, os dividendos são iguais aos fluxos de caixa. Ademais, toda a tomada de empréstimo é efetuada por indivíduos. Então, a restrição orçamentária de uma "família" no instante de tempo *t* é dada por:

$$c_t = \omega_t + d_t - \rho_t \theta b_t + \rho_t \dot{b}_t \tag{74}$$

onde

$$d_t \equiv D_t/L_0 \tag{75}$$

$$D_t \equiv N(K^N{}_t\,,\, L^N{}_t) + \rho_t\; T(K^T{}_t \;\; L^T{}_t) \;\; \omega_t\, [\, L^N{}_t + L^T{}_t\,] \; -\rho_t \;[\, I^N{}_t + I^T{}_t\,] \;\; [\, 1 + \tau(I_t/K_t)] \tag{76}$$

$$b_t \equiv B_t/L_0 \tag{77}$$

Como antes, supomos uma condição terminal de proibição de "jogo-Ponzi":

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\theta t}\, b_t = 0 \tag{78}$$

Integrando (74) "para diante" usando (78), tem-se:

$$\int_0^\infty c_t \left[ e^{-\int_0^t r_s\, ds} \right] dt = \int_0^\infty (\omega_t + d_t) \left[ e^{-\int_0^t r_s\, ds} \right] d_t - \rho_0 b_0 \qquad (79)$$

Utilizando o fato de que as firmas maximizam o valor presente descontado dos fluxos de caixa, que são iguais aos dividendos, reescrevemos a restrição orçamentária (79):

$$\int_0^\infty c_t \left[ e^{-\int_0^t r_s\, ds} \right] dt = h_0 + q^N_0 (K^N_0/L_0) + q^T_0(K^T_0/L_0) - \rho_0 b_0 = W_0 \qquad (80)$$

onde

$h_0$ = "riqueza humana" de uma "família", no tempo $t = 0$

$\{ q^N_0 \ (K^N_0/L_0) + q^T_0(K^T_0/L_0) \quad \rho_0 b_0 \}$ = riqueza financeira de uma "família", no tempo $t = 0$

$W_0$ = riqueza líquida de uma "família", no tempo $t = 0$.

Como a "família" e o planejador central maximizam a mesma função de bem-estar (1), sabemos que o caminho ótimo do consumo deve satisfazer às equações (35) e (36).

Passamos agora a mostrar que a economia descentralizada e competitiva duplica a solução de controle ótimo.

Agregando-se em relação às famílias, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{L_0} c^j_t = C_t \qquad (81)$$

$$\sum_{j=1}^{L_0} (\omega^j_t + d^j_t) = N(K^N_t \cdot L^N_t) + \rho_t\, T(K^T_t\, L^T_t) - \rho_t \left[ I^N_t + I^T_t \right] \left[ 1 + \tau(I_t/K_t) \right] \qquad (82)$$

$$\sum_{j=1}^{L_0} b^j_0 = B_0 \qquad (83)$$

A restrição orçamentária agregada da economia descentralizada e competitiva fica sendo:

$$\int_0^\infty C_t \left[ e^{-\int_0^t r_s\, ds} \right] dt = \int_0^\infty \left\{ N(K^N_t, L^N_t) + \rho_t T(K^T_t, L^T_t) - \rho_t \left[ I^N_t + I^T_t \right] \left[ 1 + \tau\,(I_t/K_t) \right] \right\} \left[ e^{-\int_0^t r_s ds} \right] dt \quad \rho_0 B_0 \qquad (84)$$

Equilíbrio no mercado de bens de consumo exige que:

$$C_t = N(K^N_t, L^N_t) \,.\, \forall t \qquad (85)$$

Dado (85), a restrição orçamentária (84) se reduz a:

$$\int_0^\infty \rho_t \left[ I^N_t + I^T_t \right] \left[ 1 + \tau(I_t/K_t) \right] \left[ e^{-\int_0^t r_s ds} \right] dt = \int_0^\infty \rho_t\, T(K^T_t, L^T_t) \left[ e^{-\int_0^t r_s ds} \right] dt - \rho_0 B_0 \qquad (86)$$

Usando a definição da taxa de juros real interna (Eq. (31)), reescrevemos (86):

$$\int_0^\infty \rho_t \left[ e^{-\int_0^t \hat{\rho}_s\, ds} \right] dt \,.\, \int_0^\infty I_t \left[ 1 + \tau(I_t/K_t) \right] e^{-\theta t} dt = \int_0^\infty \rho_t \left[ e^{-\int_0^t \hat{\rho}_s\, ds} \right] dt \,.\, \int_0^\infty T(K^T_t, L^T_t)\, e^{-\theta t} dt - \rho_0 B_0 \qquad (87)$$

que, usando (A20) (vide Apêndice), se reduz a:

$$\rho_0 \int_0^\infty I_t \left[ 1 + \tau(I_t/K_t) \right] e^{-\theta t} dt = \rho_0 \int_0^\infty T(K^T_t, L^T_t)\, e^{-\theta t} dt - \rho_0 B_0$$

ou

$$\int_0^\infty I_t \left[ 1 + \tau\,(I_t/K_t) \right] e^{-\theta t} dt = \int_0^\infty T(K^T_t, L^T_t)\, e^{-\theta t} dt - B_0 \qquad (88)$$

Naturalmente, esta é a mesma restrição orçamentária enfrentada pelo planejador central (Eq. (50).

Demonstramos que a economia descentralizada e competitiva duplica perfeitamente aquela sob controle ótimo. Portanto, leva à mesma alocação estática e dinâmica dos recursos (ou seja, tanto para a variável-estoque "mão-de-obra" como para as variáveis-fluxo "investimento, consumo e crescimento da dívida").

## 4. Equilíbrio no Mercado de Bens *Non-Tradeable*

### Demanda

Para estudar a determinação do nível de consumo em um ponto no tempo (e, portanto, a alocação de trabalho entre setores), usaremos um caso especial. Suponhamos que a razão capital/trabalho seja a mesma em ambos os setores, para todas as razões salário/*rental*(7). Isto implica um preço relativo constante de bens *tradeable* em termos de bens *non-tradeable,* (a taxa real de câmbio), na trajetória de crescimento ótimo. Então, nesse caminho, a taxa real de juros "interna" – a taxa relevante para decisões sobre consumo – será sempre igual à taxa real de juros mundial.

Na realidade, esta é apenas uma hipótese conveniente. É muito mais fácil analisar o comportamento do consumo neste caso mais simples; contudo, o mesmo não resulta em perda de generalidade. Vimos acima como o caminho da taxa real de câmbio é determinado no sistema geral, e como sua taxa de mudança determina a evolução do consumo no decurso do tempo. Nossa principal preocupação, neste trabalho, não é a determinação dos níveis de consumo; ao invés disto, desejamos observar desvios de consumo desde um caminho ótimo anteriormente planejado, surgindo como uma resposta ótima aos choques econômicos. O mesmo se aplica à taxa real de câmbio e, portanto, à taxa real de juros interna.

Suponha, portanto, que

$$\rho_t = \rho^* \quad \forall t \tag{89}$$

que, dado (34), resulta em:

$$\dot{\rho}_t = 0 = \mu_t, \forall t \tag{90}$$

Portanto,

$$U'(c_t) = \mu_t = \mu_o, \forall t \tag{91}$$

o que implica que:

$$c_t = c_o, \forall t \tag{92}$$

Ou seja, uma taxa cambial real constante resulta em um nível constante de consumo, quando a utilidade está sendo maximizada.

Logo,

$$\int_o^\infty c_t \left[ e^{-\int_o^t r_s ds} \right] dt = \int_o^\infty c_o \left[ e^{-\int_o^t \theta\, ds} \right] dt = c_o \int_o^\infty e^{-\theta t} dt = \theta^{-1} c_o \tag{93}$$

Então, reescrevemos (80):

$$\theta^{-1} c_o = W_o$$

ou

$$c_o = \theta W_o \tag{94}$$

O consumo é uma proporção fixa da riqueza líquida, sendo a razão consumo/riqueza igual à taxa de juros real. Se a taxa real de câmbio for diferente de seu nível de equilíbrio (ou "trajetória", em geral), a taxa de juros real interna será diferente da taxa de juros real mundial; isto levará a um diferente caminho para o consumo. Um nível mais baixo de riqueza líquida reduz o consumo; uma expectativa de aumentos no preço relativo de bens *non-tradeable* (uma taxa real de câmbio decrescente) leva a um caminho descendente de consumo real ao longo do tempo.

### Oferta

Em nosso *framework,* é óbvio que a oferta de bens *non-tradeable* é uma função de seu preço relativo e da dimensão relativa dos estoques de capital em cada setor(8):

---

(7) SAMUELSON (1949, nota de rodapé 9) mostra que, se $k^N = k^T$, existe um número infinito de razões salário/*rental* de capital/trabalho consistentes com um dado preço relativo, $\rho$. No entanto, isto não é um problema em nosso caso; não partimos de $\rho$ para *W/R* e *k,* mas começamos com *k* e então encontramos *W/R* e $\rho$. O fato de que $\rho$ é dado $(\rho = \rho^*)$, não nos traz nenhum problema.

(8) A derivação da função de oferta de bens *non-tradeable* é bastante direta. Começamos

$N(K^N{}_t, L^N{}_t) = N(K^N{}_t, \gamma_t . h(p^N{}_t/p^T{}_t))$ ; $h' > 0$

ou

$$N(K^N{}_t, L^N{}_t) = F(K^N{}_t, (K^N{}_t/K^T{}_t), (p^N{}_t/p^T{}_t)) ; F_i > 0, i = 1,2,3 \quad (95)$$

e, a curto prazo (com $K^N{}_t = \bar{K}^N$ ; $K^T{}_t = \bar{K}^T$),

$$N(K^N{}_t, L^N{}_t) = \psi(p^N{}_t/p^T{}_t) ; \psi' > 0 \quad (96)$$

onde

$$\gamma_t \equiv K^N{}_t/K^T{}_t$$

---

lembrando que as suposições de pleno emprego, CRTS e alocação ótima de recursos (ou economia competitiva) implicam claramente que, em qualquer tempo $t$,

$$L^N{}_t = \sigma(K^N{}_t/K^T{}_t) ; \sigma' > 0$$

Por outro lado, a partir de (38) – igualdade do preço relativo e MRT para trabalho – e CRTS,

$$p^N/p^T = j(k^T/k^N)$$

ou

$$j^{-1}(p^N/p^T)\ [L^T/K^T] = L^N/K^N$$

ou, usando a restrição da mão-de-obra (16),

$$L^N = (K^N/K^T)\ [L_o - L^N]\ j^{-1}(p^N/p^T)$$

ou

$$L^N = \gamma . h(p^N/p^T) ; h' > 0$$

$$\gamma \equiv K^N/K^T$$

A curto prazo, quando $K^N$ e $K^T$ são dados, temos que

$$L^N = \bar{\gamma} . h(p^N/p^T)$$

Portanto,

$$N(K^N{}_t, L^N{}_t) = N(K^N{}_t, \gamma . h(p^N/p^T))$$

e, a curto prazo,

$$N(\bar{K}^N{}_t, L^N{}_t) = \psi(p^N/p^T) ; \psi' > 0$$

A oferta de bens *non-tradeable* aumenta com seu preço relativo, $p^N/p^T$. Um estoque maior de capital no setor de bens *tradeable*, para o mesmo $K^N$ e o mesmo preço relativo, reduz a oferta de *non-tradeables*.

**Equilíbrio de Mercado**

O equilíbrio no mercado de bens *non-tradeable* requer

$$C_t = C_o = N(K^N{}_t, L^N{}_t) \quad (97)$$

Portanto,

$$(\partial N/\partial K^N{}_t)\dot{K}^N{}_t = -(\partial N/\partial L^N{}_t)\dot{L}^N{}_t$$

ou

$$\dot{K}^N{}_t = -[(\partial N/\partial L^N{}_t)/(\partial N/\partial K^N{}_t)]\ \dot{L}^N{}_t = p^* [(\partial T/\partial L^T{}_t)/(\partial T/\partial K^T{}_t)]\ \dot{L}^T{}_t \quad (98)$$

vindo a útima igualdade da suposição de pleno emprego, ou seja,

$$\dot{L}^N{}_t = -\dot{L}^T{}_t \quad (99)$$

Dado o caminho da relação $k^N/k^T$ determinado como mostrado acima, achamos $\dot{K}^N{}_t$ como função de $\dot{K}^T{}_t$. No caso especial em consideração (razões capital/trabalho iguais), isto é simplesmente

$$\dot{k}^N{}_t = \dot{k}^T{}_t$$

ou

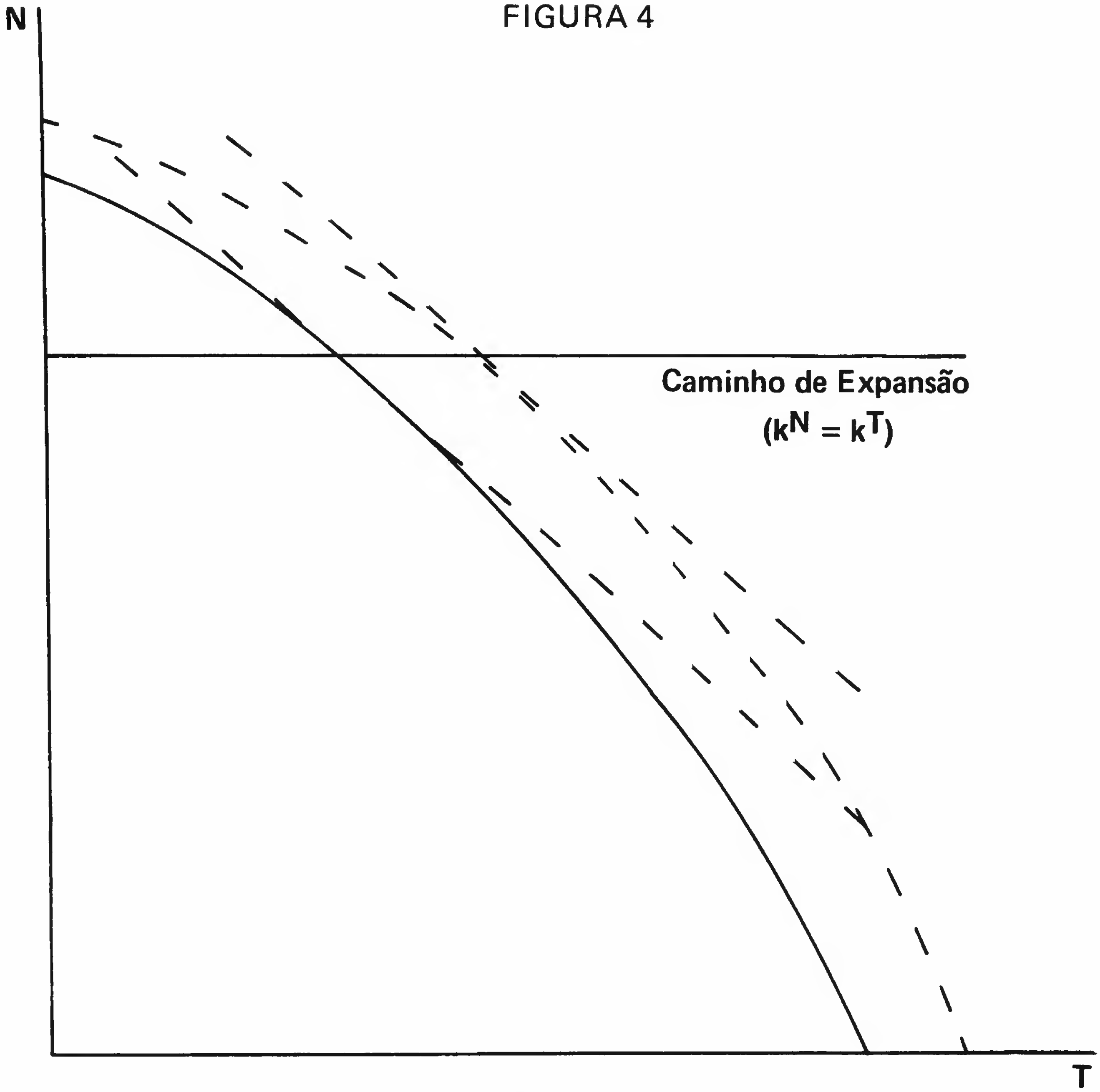
$$\hat{K}^N{}_t - \hat{L}^N{}_t = \hat{K}^T{}_t - \hat{L}^T{}_t$$

ou ainda,

$$\hat{K}^N{}_t = \hat{K}^T{}_t + \hat{L}^N{}_t . (L_o/L^T{}_t) \quad (100)$$

Como $\dot{K}^N{}_t \geq 0$ $\dot{L}^N{}_t \leq 0$ (da Eq. (98)). Portanto, a taxa de crescimento do estoque de capital no setor de bens *non-tradeable* é sempre menor que no setor de *tradeables* (ou igual, no estado estacionário, quando ambas forem zero).

FIGURA 4




A figura 4 mostra o caminho de expansão da economia quando a taxa real de câmbio é constante.

Podemos agora determinar uma solução geométrica para o modelo como um todo. A figura 5a a seguir mostra a determinação do equilíbrio no mercado para bens de consumo (*non-tradeable*). Começamos com a seguinte pergunta: qual alocação de recursos seria um equilíbrio, dados o estoque agregado de capital e a força de trabalho total? A função de demanda de consumo *C(W,(θ  r))* é uma função da riqueza líquida (W) e da diferença entre a taxa de preferência intertemporal *(θ)* e a taxa de juros real deflacionada pela cesta de consumo *(r)*. A inclinação desta curva é, na verdade, irrelevante. Na figura, a mesma é traçada com uma inclinação negativa. Podemos traçá-la neste plano porque, dada a dívida externa, a riqueza é uma função das relações capital/trabalho (que determinam o preço do capital, como vimos acima); a taxa de juros real (de consumo) também é uma função de *k*, já que isto determina a taxa real de câmbio e, então, sua taxa de variação.

A curva de oferta de bens *non-tradeable* $N(k^N)$ pode ter inclinação positiva ou negativa. Se os bens *non-tradeable* forem menos intensivos em capital do que os *tradeables*, essa curva tem inclinação positiva; caso contrário, tem uma inclinação negativa. A in-

FIGURA 5a

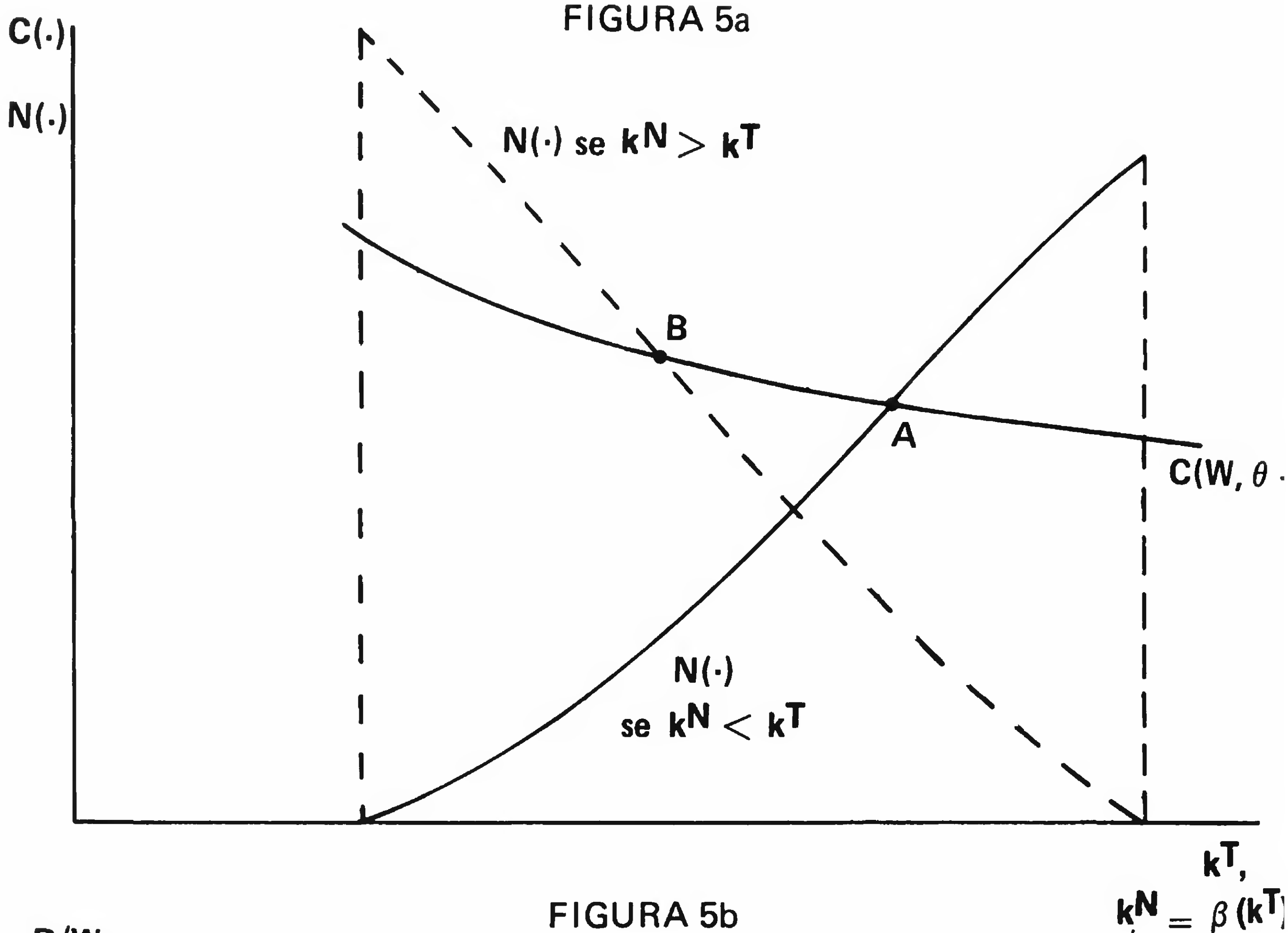
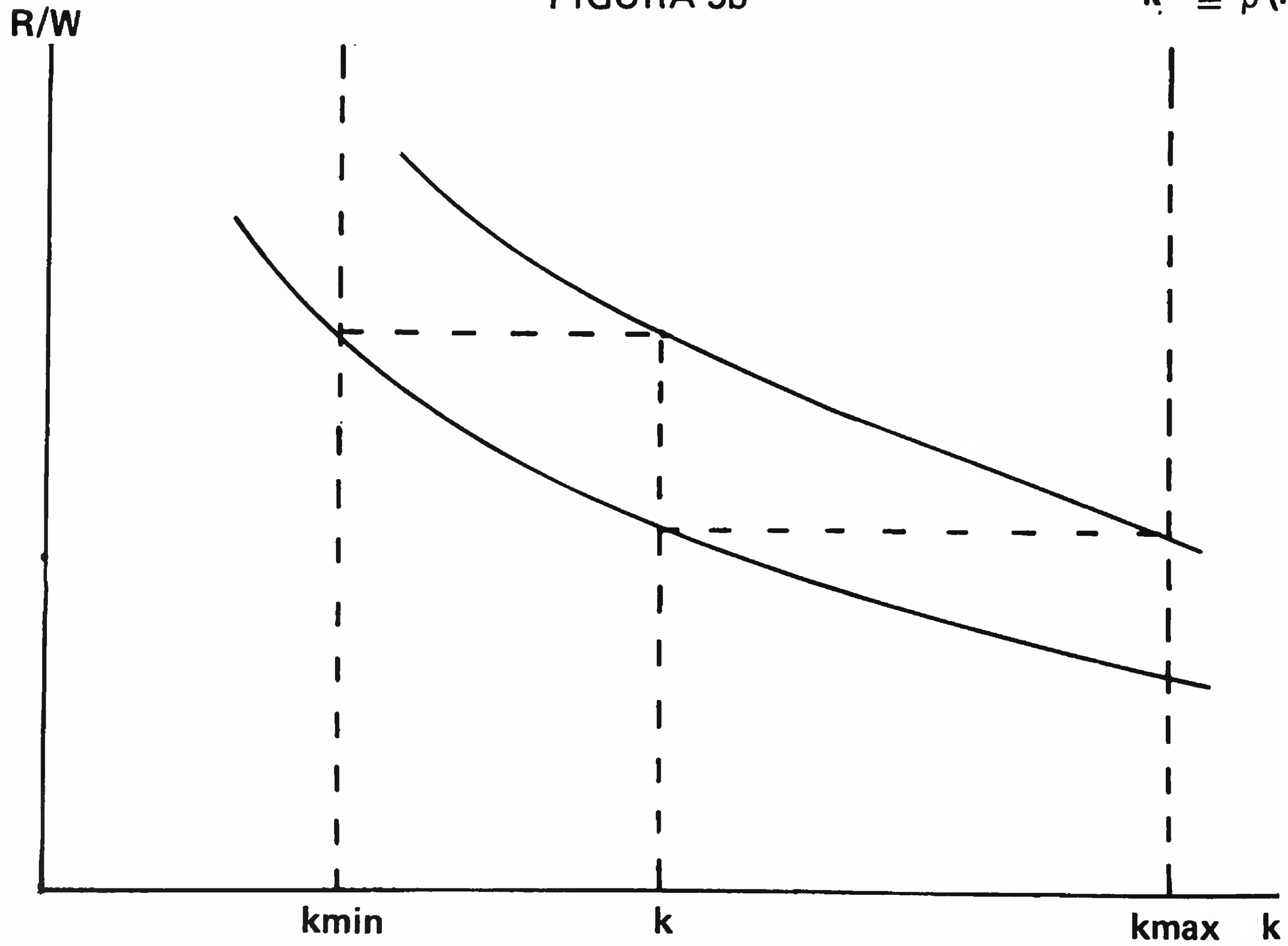



FIGURA 5b



clinação dessa curva é determinada de um modo simétrico ao famoso Teorema de Rybczynski. No teorema citado, as razões capital/trabalho são dadas em cada setor devido a um dado preço relativo dos bens. Então, se o estoque de capital aumentar (aumentando o estoque de capital *per capita*), a produção do bem intensivo em capital aumentará, ao passo que *diminuirá* no outro setor. Em nosso caso, é dado o *estoque* de capital total. Desejamos encontrar o efeito de maiores *relações* capital/trabalho (lembre-se que $k^N$ e $k^T$ devem variar na mesma direção para que a alocação de recursos seja ótima). Um dado estoque de capital significa que a relação *K/L* agregada também é dada. Então, se aumentarmos a razão capital/trabalho em ambos os setores, mais capital (e trabalho) terão que ser alocados para o setor *menos* intensivo em capital, aumentando sua produção. Ao mesmo tempo, a produção cairá no setor *mais* intensivo em capital. Este processo está ilustrado na figura 5b.

Os pontos A e B na figura 5a são os equilíbrios, para cada caso (ponto A se $k^N < k^T$; ponto B se $k^N > k^T$). O equilíbrio neste mercado determina então as razões capital/trabalho, que darão o valor do estoque de capital e a taxa real de câmbio (vide figuras 2 e 3).

## Observações Finais

O objetivo deste artigo era a formulação de um modelo dinâmico analítico que retratasse com um mínimo de fidelidade certas características essenciais da estrutura econômica de países em desenvolvimento. O modelo é voltado para a análise de "choques externos", considerando explicitamente as decisões de investimento, poupança e alocação de recursos e investimento nos setores *tradeable* e *non-tradeable*.

Em Toledo (1985, Cap. I) este modelo é utilizado para determinar os efeitos de diversos tipos de "choques" externos, favoráveis ou não. É possível analisar, assim, o efeito de um súbito aumento do fluxo de transferências para o exterior, ou uma deterioração nos termos de troca ou, ainda, uma elevação (temporária) da taxa de juros real. O modelo parece ser bastante rico e capaz de fornecer orientações de política econômica.

## Referências Bibliográficas


ABEL, Andrew B. & BLANCHARD, Oliver J. An Intertemporal Model of Saving and Investment. *Econometrica, 51*(3), May 1983.

ATSUMI, Hiroshi. The Long-Run Offer Function and a Dynamic Theory of International Trade. *Journal of International Economics 1*(3): 267-299, 1971.

BLANCHARD, Oliver J. *Debt and the Current Account Deficit in Brazil.* NBER Conference Paper nº 135, Nov. 1981.

_______& FISCHER, S. *The Infinite Horizon Case.* MIT Lecture Notes, Chapter II, unpublished manuscript, MIT, 1984.

BRUNO, Michael. The Two-Sector Open Economy and the Real Exchange Rate. *AER 66*(4): 566-577, Sept. 1976.

COOPER, Richard N. & SACHS, Jeffrey D. Borrowing Abroad: The Debtor's Perspective. *NBER Working Paper nº 1427,* Aug. 1984.

DORNBUSCH, Rudiger. Real Interest Rates, Home Goods, and Optimal External Borrowing. *Journal of Political Economy 91*(1):141-153, 1983.

_______. External Debt, Budget Deficits, and Disequilibrium Exchange Rates. *NBER Working Paper nº 1336,* Apr. 1984.

FISCHER, Stanley & FRENKEL, J. Investment, the Two-Sector Model, and Trade in Debt and Capital Goods. *In:* BHAGWATI, J.N. (ed.), *Inrternational Trade: Selected Readings.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.

LIPTON, D. *Non-Traded Goods in a Two-Country Model of Growth and Accumulation.* Unpublished Manuscript, Harvard University, 1981.

________ & SACHS, J. Accumulation and Growth in a Two-Country Model. *Journal of International Economics 15:* 135-159, 1983.

MARTIN, Ricardo & SELOWSKY, Marcelo. Energy Prices, Substitution, and Optimal Borrowing in the Short-Run: An Analysis of Adjustment in Oil-Importing Developing Countries. *Journal of Development Economics 14:* 331-350, 1984.

MAYER, Wolfang. Short-Run and Long-Run Equilibrium for a Small Open Economy. *Journal of Political Economy 82*(5): 955-967, 1974.

RAMSEY, F.P. A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal, XXXVIII* (152): 543-559, Dec. 1928; reprinted in STIGLITZ, J.E. & UZAWA, H. (eds.). *Readings in the Modern Theory of Economic Growth.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts: 429-445, 1969.

RYDER JR., Harl E. Optimal Accumulation in a Two-Sector Neoclassical Economy with Non-Shiftable Capital. *Journal of Political Economy 77:* 665-683; 1969.

SACHS, Jeffrey D. The Current Account and Macroeconomic Adjustment in the 1970s. *Brookings Papers on Economic Activity (BPEA)* 1: 201-268, 1981.

SAMUELSON, Paul A. International Factor-Price Equalisation Once Again. *The Economic Journal:* 181-197, Jun. 1949; reprinted in BHAGWATI (1981): 3-16.

SRINIVASAN, T.N. Optimal Savings in a Two-Sector Model of Growth. *Econometrica 32:* 358-373, 1964.

TOLEDO, Joaquim Elói Cirne de. *Three Essays on Macroeconomic Policies in the Open Economy.* Dissertação de Doutorado. Massachusetts Institute of Technology, out. 1985.

UZAWA, H. On a Two-Sector of Economic Growth. *Review of Economic Studies 29:* 40-47, 1962.

________. Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies 31:* 1-25, 1964.

WEITZMAN, Martin L. Shiftable versus Non-Shiftable Capital: A Synthesis. *Econometrica 39*(3): 511-529, May 1971.


## Apêndice
## O Modelo com Controle Ótimo

Repetimos aqui o Hamiltoniano:

$$H_t = \Big\{ U(C_t) \quad \mu_t \left[ C_t - N(K^N{}_t, L^N{}_t) \right] + \omega_t \mu_t \left[ L_0 \quad L^N{}_t \quad L^T{}_t \right] \quad \rho_t \mu_t \left[ I_t \left[ 1 + \tau (I_t / K_t) \right. \right. \quad T(K^T{}_t, L^T{}_t) \left. \right] + \mu_t q^N{}_t I^N{}_t + \mu_t q^T{}_t I^T{}_t \Big\} e^{-\theta t} \tag{A1}$$

As condições necessárias e suficientes para que um caminho seja ótimo são:

$$*\partial H / \partial C \equiv H^C = 0$$

$$U'(C_t) = \mu^t \tag{A2}$$

$$*H_{L_t^N} = 0$$

$$\partial N / \partial L^N{}_t = \omega_t \tag{A3}$$

$$*H_{L_t^T} = 0$$

$$\rho_t (\partial T / \partial L^T{}_t) = \omega_t \tag{A4}$$

Usando (A3) e (A4), obtemos:

$$\rho_t = (\partial N / \partial L^N{}_t) / (\partial T / \partial L^T{}_t) \tag{A5}$$

$$*H_{I_t^N} = 0$$

$$- \rho_t \mu_t \Big\{ 1 + \tau (I_t / K_t) + I_t \tau'(\cdot) \; [1/K_t] \Big\} + \mu_t q^N{}_t = 0$$

ou

$$\rho_t \left\{ 1 + \tau(\cdot) + [I_t/k_t]\tau'(\cdot) \right\} =$$

$$= q^N_t \quad \text{(A6)}$$

$$*H_{I_tT} = 0$$

$$\rho_t \left\{ 1 + \tau(\cdot) + [I_t/K_t]\tau'(\cdot) \right\} =$$

$$= q^T_t \quad \text{(A7)}$$

Naturalmente, (A6) e (A7) dão:

$$q^N_t = q^T_t = q_t \quad \text{(A8)}$$

$$*d\,\xi^N_t/dt = -H_{K_t^N}$$

$$d\,\xi^N_t/dt = \{\mu_t q^N_t + \mu_t \dot{q}^N_t\} e^{-\theta t} - \theta \mu_t q^N_t e^{-\theta t} =$$

$$\{\mu_t \dot{q}^N_t + [\mu_t - \theta \mu_t] q^N_t\} e^{-\theta t}$$

$$H_{K^N_t} = \left\{ \mu_t(\partial N/\partial K^N_t) + \rho_t \mu_t I_t\, \tau'(\cdot)[I_t/K^2_t] \right\} e^{-\theta t} =$$

$$= \left\{ \mu_t(\partial N/\partial K^N_t) + \rho_t \mu_t [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \right\} e^{-\theta t}$$

Então

$$\left\{ \mu_t \dot{q}^N_t + [\dot{\mu}_t - \theta\mu_t] q^N_t \right. = -\left\{ \mu_t(\partial N/\partial K^N_t) + \rho_t \mu_t [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \right\}$$

ou

$$\dot{q}^N_t = [\theta - (\dot{\mu}_t/\mu_t)]\, q^N_t - (\partial N/\partial K^N_t)\, \rho_t [I_t/K_t]^2\, \tau'(\cdot) \quad \text{(A9)}$$

$$d\,\xi^T_t/dt = -H_{K^T_t}$$

$$\mu_t \dot{q}^T_t + [\dot{\mu}_t - \theta\mu_t]\, q^T_t = -\rho_t \mu_t \left\{ (\partial T/\partial K^T_t) + [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \right\}$$

ou

$$\dot{q}^T_t = [\theta - (\dot{\mu}_t/\mu_t)]\, q^T_t - \rho_t \left\{ (\partial T/\partial K^T_t) + [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \right\} \quad \text{(A10)}$$

$$*\lim_{t\to\infty} \xi^N_t K^N_t = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t q^N_t e^{-\theta t} K^N_t = 0 \quad \text{(A11)}$$

$$*\lim_{t\to\infty} \xi^T_t k^T_t = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t q^T_t e^{-\theta t} K^T_t = 0 \quad \text{(A12}$$

Definindo agora a taxa de juros real interna:

$$r_t \equiv \theta + \dot{\rho}_t/\rho_t \equiv \theta + \hat{\rho}_t \quad \text{(A13)}$$

Temos que (vide texto):

$$[u'(c_t)]^{\cdot}/u'(c_t) = \theta - r_t \quad \text{(A14)}$$

A partir de (A2),

$$[u'(c_t)]^{\cdot} \equiv u''(c_t)\,\dot{c}_t = \dot{\mu}_t \quad \text{(A15)}$$

Usando (A13) e (A15), reescrevemos (A14):

$$\dot{\mu}_t/\mu_t = \theta - r_t = \theta - [\theta + (\dot{\rho}_t/\rho_t)] = -\dot{\rho}_t/\rho_t \quad \text{(A16)}$$

Usando (A16), reescrevemos (A9) e (A10):

$$\dot{q}^N_t = [\theta + (\dot{\rho}_t/\rho_t)]\, q^N_t - (\partial N/\partial K^N_t) - \rho_t [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \quad \text{(A17)}$$

$$\dot{q}^T_t = [\theta + (\dot{\rho}_t/\rho_t)]\, q^T_t - \rho_t \left\{ (\partial T/\partial K^T_t) + [I_t/K_t]^2 \tau'(\cdot) \right\} \quad \text{(A18)}$$

Integrando (A17),

$$q^{N}{}_{o} = \int_{o}^{\infty} \{(\partial N / \partial K^{N}{}_{t})] + \rho_{t} [\, I_t / K_t]^2$$

$$\tau' \;\; (\cdot) \} [\, e^{-\int_{o}^{t} r_s \, ds} ] \, dt \qquad \text{(A19)}$$

Naturalmente,

$$\rho_t = \rho_o \, [e^{\int_{o}^{t} (\dot{\rho}_s / \rho_s) \, ds}]$$

ou

$$\rho_t \, [\, e^{-\int_{o}^{t} (\dot{\rho}_s / \rho_s) \, ds} ]' = \rho_o \qquad \text{(A20)}$$

Então, usando (A13),

$$q^{N}{}_{o} = \rho_o \int_{o}^{\infty} \{[(1/\rho_t)(\partial N / \partial K^{N}{}_{t})] +$$

$$+ [\, I_t / K_t]^2 \, \tau'(\cdot) \} \, e^{-\theta t} \, dt \qquad \text{(A21)}$$

De maneira similar,

$$q^{T}{}_{o} = \rho_o \int_{o}^{\infty} \{(\partial T / \partial K^{T}{}_{t}) + [\, I_t / K_t]^2$$

$$\tau'(\cdot) \} e^{-\theta t} \, dt \qquad \text{(A22)}$$

Diferenciando (A8) com respeito ao tempo, descobrimos que

$$\dot{q}^{N}{}_{t} = \dot{q}^{T}{}_{t} = \dot{q}_t \qquad \text{(A23)}$$

Usando (A9) e (A10), obtemos:

$$\partial N / \partial K^{N}{}_{t} = \rho_t \, (\partial T / \partial K^{T}{}_{t})$$

ou, a partir de (A5),

$$\rho_t = (\partial N / \partial L^{N}{}_{t}) / (\partial T / \partial L^{T}{}_{t}) = (\partial N / \partial K^{N}{}_{t}) /$$

$$(\partial T / \partial K^{T}{}_{t}) \qquad \text{(A24)}$$

Finalmente, usando (A8) e invertendo (A6) ou (A7),

$$I_t = K_t \, \phi \, (q_t / \rho_t) \qquad \text{(A25)}$$

$$\phi(1) = 0$$

$$\phi'(\cdot) > 0$$