Empréstimos Bancários e Saldo Médio: O Caso de Prestações

CLOVIS DE FARO

Resumo

Concentrando atenção no caso de empréstimos bancários sujeitos a exigências ditas de saldo-médio, o trabalho investiga como calcular, eficientemente, o custo efetivo do ponto de vista do tomador. Mostra-se que, em certas situações, é inaplicável a metodologia usual baseada no conceito da taxa interna de retorno. Para tais situações, faz-se necessária uma generalização, que leva explicitamente em conta a taxa de juros prevalecente no mercado de aplicações.

Palavras-chave: empréstimos bancários, custo de capital, taxa interna de retorno, taxa de juros, contabilidade de custos.

Abstract

Focusing attention on the case of commercial banking loans subject to minimum balance requirements, the paper surveys efficient procedures for computing the effective cost. It is shown that, for some given situations, the usual methodology based on the internal rate of return concept is not applicable. For such instances, it is necessary to take explicitly in account the prevailling market rate.

Key words: bank loans, capital costs, internal rate of return, interest rate, cost accounting.

Introdução

Via de regra, os bancos comerciais, em suas operações de financiamento de curto prazo, costumam fazer uso de dois princípios básicos: a) cobrança de juros através do emprego do chamado desconto comercial ou bancário; b) exigências corriqueiramente denominadas de reciprocidades. Dentre estas últimas, uma das mais comuns é a que condiciona a concessão de empréstimo à presença de um certo nível de saldo médio em conta corrente do cliente.

O autor é da EPGE/FGV, da FCE/UERJ e do TPP/UFF.

Concentrando atenção no caso onde o empréstimo deva ser resgatado por intermédio de prestações periódicas e iguais(1), o objetivo do presente trabalho é o de determinar o seu custo efetivo para o cliente. Este custo é medido em termos da taxa interna de retorno associada ao fluxo de caixa que descreve a operação do ponto de vista do mutuário, quando se leva em conta o efeito de exigências de manutenção de saldo-médio.

Um aspecto que deve ser destacado é, como veremos, que a exigência de manutenção de saldo-médio, tanto na hipótese de prévia existência, que denominamos de caso de exigência *a priori,* como na eventualidade de que o saldo-médio mantenha-se ao longo do prazo do empréstimo, dito caso de exigência *a posteriori,* pode conduzir a situações onde não seja formalmente aplicável o conceito usual de taxa interna de retorno de um fluxo de caixa. Em tais eventualidades, que são identificadas pelo fato de o correspondente fluxo de caixa apresentar duas variações de sinal, faz-se necessário lançar mão, como iremos discutir, de uma extensão da noção de taxa interna de retorno. Para cada uma das situações possíveis será apresentado um procedimento eficiente para a determinação do custo efetivo do empréstimo.

O restante do trabalho organiza-se da seguinte maneira: na primeira seção, como pano de fundo, apresenta-se o estudo do que se denominou de caso básico, que é aquele onde não ocorre exigência de saldo-médio; o efeito da exigência *a priori* é analisado na segunda seção; a terceira seção trata da investigação da eventualidade em que haja uma exigência *a posteriori.* Por último, resumem-se as principais conclusões.

1. O Caso Básico

Admita-se que um cliente solicite um empréstimo, no valor E, a um banco comercial que cobra a taxa periódica de juros i, para operações deste tipo. Suponha-se também que fique acertado que o financiamento deva ser resgatado por meio de n prestações periódicas, constantes e iguais a p, com a primeira vencendo 1 período após a data de concessão do mútuo. Usualmente, para cada prestação, o cliente é obrigado a emitir uma nota promissória, com valor nominal igual a p e vencimento coincidente com o do pagamento da respectiva prestação. A praxe de fazer com que o valor de p seja determinado de modo que a soma dos valores comercialmente descontados, à taxa i, das n notas

(1) O caso de pagamento único, com cobrança antecipada de juros, foi anteriormente tratado em DE FARO (1985b).

promissórias, iguale o valor E do empréstimo, implica que (cf. DE FARO, 1982a, p. 82-84)(2):

$$E = \sum_{j=1}^{n} p\,(1 - j.i)$$

Logo:

$$p = 2.E/\{n[2-(n+1)i]\} \tag{1}$$

Na ausência de taxação, o custo efetivo para o cliente é definido como sendo a taxa interna de retorno (TIR), denotada por i^*, do fluxo de caixa $\{a_0, a_1,..., a_n\}$, onde $a_0 = -E$ e $a_j = p$ para $j = 1,..., n$. Havendo a cobrança de um imposto sobre operações de crédito, que incide sobre o tomador de empréstimo, e cobrado quando da sua liberação, o seu efeito pode ser facilmente incorporado. Para tanto, denotando por T a quantia paga como tributo(3), basta atentar para o fato de que o valor que é liquidamente recebido pelo cliente é a diferença $E-T$. Logo, no fluxo de caixa acima, basta fazer $a_0 = -E + T$.

Havendo ou não a presença de tributo, o fluxo de caixa resultante define um projeto do tipo investimento simples. Logo, como discutido em de Faro (1985a, p. 117-121), a correspondente TIR pode ser eficientemente determinada via a aplicação do algoritmo de Newton-Raphson(4). Ainda mais, dado que as prestações são iguais, sugere-se que a primeira aproximação seja a dada segundo o proposto por Karpin (1967). Isto é, como mostrado em de Faro (1985a. p. 113-116), tome-se:

$$i_1 = \frac{2.\beta\,(3 + \beta)}{2.n.\beta + 3\,(n+1)} \tag{2a}$$

onde

$$\beta = -(np + a_0)/a_0 \tag{2b}$$

---

(2) Obviamente, e por isso tais empréstimos são, em geral, de curto prazo, devemos ter $n < 1/i$, sendo $0 < i < 1$.

(3) Usualmente, sendo t a alíquota considerada, temos $T = t.E$. Caso a alíquota incida sobre o valor financiado mais juros, teremos $T = t.n.p$, com p dado por (1).

(4) Obviamente, se $n = 1$ ou $n = 2$, deve ser diretamente resolvida, respectivamente, a equação de 1º ou 2º grau que define i^*

A seguir, se necessário, até que seja alcançada a precisão desejada, faça-se uso da recursão

$$i_{k+1} = i_k - V(i_k) / V'(i_k) \tag{3}$$

onde:

$$V(i_k) = a_0 + p\,[1 - (1+i_k)^{-n}] / i_k = a_0 + p.a_{\overline{n}|\,i_k} \tag{4}$$

e

$$V'(i_k) = p\,\{n\,(+i_k)^{-n-1} - a_{\overline{n}|\,i_k}\,\} / i_k \tag{5}$$

2. O Caso de Exigência a Priori

Suponha-se agora que, para fazer jus ao empréstimo de valor *E*, o cliente deva satisfazer certos requisitos em termos de um dado valor mínimo de saldo-médio, em conta corrente, pregresso. Especificamente, sendo $\alpha > 0$, admita-se que o saldo médio deva ser, no mínimo, igual a αE, ao longo dos, pelo menos, *m* períodos imediatamente antecedentes à data de concessão do financiamento.

Admitindo-se que para obter um empréstimo o cliente faça um depósito igual a αE, *m* períodos antes da data de concessão do crédito (considerando que o saldo médio fica liberado concomitantemente como valor *E* segue-se que o fluxo de caixa que sintetiza a operação global é $\{a_0, a_1, ..., a_{m+n}\}$, onde:

$$a_j = \begin{cases} \alpha E & j = 0 \\ 0, & j = 1, ..., m-1 \\ & \\ -E\,(1+\alpha) + T, & j=m \\ p, & j=m+1, ..., m+n \end{cases} \tag{6}$$

Ora, tal fluxo de caixa apresenta exatamente duas variações de sinal, sendo que a soma algébrica dos fluxos é

$$\sum_{j=0}^{m+n} a_j = E(n+1)\,i / [2 - (n+1) + i] + T \tag{7}$$

que, mesmo quando $T = 0$, é positiva se for satisfeita a condição $n < 1/i$. Logo, trocando os sinais de todos os fluxos de caixa, o que não altera o processo de determinação da TIR, segue-se que, como originalmente discutido por Jean (1968 e 1969), estamos diante de uma situação onde pode ocorrer mais de uma solução. Este fato implica a não aplicabilidade do conceito da taxa interna de retorno, como medida do custo efetivo para o tomador, no caso de exigência *a priori* de saldo médio.

A falência do conceito usual da TIR, para a análise da situação em apreço, é facilmente evidenciada quando se particulariza o problema fazendo-se $n = m = 1$[5]. Mais especificamente, com o intuito de possibilitar uma imediata apresentação numérica, façamos $T = 0$ e $i = 100\,(3 - \sqrt{8})$ % por período. Nesta eventualidade, considerando-se um empréstimo unitário, o correspondente fluxo de caixa é: $\{a_0 = \alpha;\, a_1 = -(1 + \alpha);\, a_2 = (1 + \sqrt{2})/2\}$. Portanto, fazendo-se $x = 1/(1 + i^*)$, a busca da TIR é equivalente à determinação das raízes positivas da seguinte equação de 2º grau:

$$(1 + \sqrt{2})\, x^2/2 - (1 + \alpha) + \alpha = 0.$$

Em função do valor de α, temos as seguintes possibilidades:

a) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ou $\alpha = \sqrt{2} - 1$

Para α assumindo o menor dos dois valores acima, teremos como solução $x = 2 - \sqrt{2}$, do que decorre que o custo efetivo para o tomador será $i^* = (1 - x)/x = \sqrt{2}/2 \simeq 70{,}7107\%$ por período. Por outro lado, considerando-se o maior dos dois valores, o que, obviamente, significa aumentar o custo para o tomador do empréstimo, teremos $x = \sqrt{2} \Rightarrow i^* = (\sqrt{2} - 2)/2 \simeq -29{,}2893\%$ por período; o que, evidentemente, é uma contradição.

b) $\sqrt{2} - 1 < \alpha < 1 + \sqrt{2}$

Como não existe raiz positiva para a equação considerada (as raízes serão complexas), segue-se que não é definida a TIR do fluxo de caixa.

c) $\alpha < \sqrt{2} - 1$ ou $\alpha > 1 + \sqrt{2}$

Agora, teremos duas distintas raízes positivas para a equação em x, o que implica a situação ambígua da existência simultânea de duas taxas internas de retorno.

(5) Note-se que este caso é análogo, mas não exatamente igual, pois não ocorre agora a cobrança antecipada de juros, conforme tratado em DE FARO (1985b).

Logo, em qualquer eventualidade, verifica-se a inadequabilidade da concepção usual da TIR para a análise do caso considerado.

2.1. O Emprego do Conceito do Custo de Oportunidade

Contabilmente, o valor $\alpha.E$ depositado para fins de fazer saldo médio, é integralmente restituído ao cliente, m período depois, quando da liberação do empréstimo. Do ponto de vista econômico, porém, houve uma perda para o mutuário. Tal perda traduz-se no que se denomina do custo de oportunidade, e é representada pelos juros que o valor $\alpha.E$ conseguiria render caso houvesse sido aplicado no mercado de capitais. Isto é, sendo ρ a taxa periódica de juros que vigora naquele mercado, a perda P incorrida pelo tomador de empréstimo, no caso de exigência *a priori* de saldo médio, é:

$$P = \alpha.E\,\{(1+\rho)^m - 1\} \tag{8}$$

Para que a perda P seja incorporada sugere-se que, do mesmo modo que o estudado em de Faro (1985b), o custo efetivo para o cliente seja tomado como a taxa interna de retorno do seguinte fluxo de caixa consolidado:

$$a_j = \begin{cases} -E\,\{1-\alpha\,[1+\rho)^m \quad 1] + T,\ j = 0 \\ p,\ j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{9}$$

Deste modo, visto que passamos a ter um projeto do tipo investimento simples, o cálculo da correspondente TIR deve ser efetuado tal como sugerido para o caso básico.

O ponto a ser destacado é que, como se verifica facilmente, a perda P cresce tanto com α, como com ρ e m, sendo que, quanto maior P, maior será o valor da TIR, pois uma mesma sucessão de n prestações iguais a p é equivalente a um "empréstimo líquido", $E - P$, menor.

3. O Caso da Exigência a Posteriori

Uma outra possibilidade, que passaremos a analisar, é aquela em que uma proporção do valor mutuado E fica retida, escrituralmente, na conta do cliente. Isto é, sendo agora $0 < \alpha < 1$, a fração $\alpha.E$ do empréstimo solicitado é, na realidade, indisponível, durante um certo prazo, para o cliente. Mais especificamente, nesta eventualidade, que denominaremos de exigência de saldo-médio *a posteriori,* admitiremos que a quantia $\alpha.E$ só fique liberada na data de pagamento da última prestação contratada.

Para o caso considerado, tendo em vista a liberação do saldo médio, segue-se que o fluxo de caixa que caracteriza a operação, do ponto de vista do tomador do empréstimo, é:

$$a_j = \begin{cases} -E(1-\alpha)+T,\ j=0 \\ p,\ j=1,\ldots,n \quad 1 \\ p \quad \alpha.E,\ j=n \end{cases} \tag{10}$$

Observando que não cabe agora a aplicação do conceito de custo de oportunidade, pois o cliente não efetuou, realmente, nenhum desembolso para a formação do saldo médio, investiguemos o fluxo de caixa dado por (10). Em função dos valores de i, de n e de α, temos 3 distintas possibilidades para o valor de $a_n = p \quad \alpha.E$[6].

3.1. Prestação Igual ao Saldo Médio

Na situação em que ocorrer a igualdade $p = \alpha.E$, o fluxo de caixa (10) define um projeto do tipo investimento simples e com, efetivamente, $n - 1$ períodos de vida econômica. Logo, o custo para o cliente pode ser medido via o conceito usual da TIR.

Tendo em vista o apresentado na seção 1, sugere-se que, sendo

$$\gamma = -[(n-1)\,p + a_0]/a_0 \tag{11a}$$

tome-se como aproximação inicial para a taxa interna de retorno i^* o valor dado por:

$$i_1 = \frac{2.\gamma\,(3 = \gamma)}{2\,(n-1)\,\gamma + 3.n} \tag{11b}$$

A seguir, conforme seja necessário, use-se a recursão expressa por (3), onde, agora, teremos:

$$V(i_k) = a_0 + p.a_{\overline{n-1}|}\ i_k \tag{4'}$$

$$V'(i_k) = p\,\{(n-1)\,(1+i_k)^{-n-2} - a_{\overline{n-1}|}\,i_k\}/i_k \tag{5'}$$

(6) Note-se que, se $n = 1$, teremos sempre $p = E/(1-i) > \alpha.E$.

3.2. Prestação Superior ao Saldo Médio

Se ocorrer que $p > \alpha.E$, o fluxo de caixa (10) também define um projeto do tipo investimento simples; agora com n períodos. Entretanto, para efeito de determinação da aproximação inicial para i^*, não mais podemos adotar o procedimento visto no caso básico. Isto porque os fluxos de caixa, para $j = 1,...,n$, deixam de ser todos iguais.

Dado que o fluxo de caixa sob exame tem alguma semelhança com o que se associa a um investimento em títulos com rendimentos periódicos, tais como os estudados em de Faro (1982b), é interessante que se investigue se as fórmulas aproximadas, que são pertinentes a este último, podem ser adaptadas para a situação em apreço. Com tal intuito e buscando uma comparação com, respectivamente, as primeiras aproximações dos algoritmos de Newton-Raphson e de Boulding, iremos analisar extensões das fórmulas de Todhunter e de Karpin.

3.2.1. Adaptação da Fórmula de Todhunter

Buscando generalizar a análise, façamos $T = \varphi.E$, onde $\varphi = t$ se a alíquota t incidir somente sobre o valor mutuado, e $\varphi = 2.t/ \{2 - (n + 1)\ i\}$ se a alíquota t for incidente sobre a soma do valor do empréstimo com o total de juros contábeis. Então, considerando-se o caso de um financiamento unitário, e denotando-se por $\bar{p}$ o correspondente valor da prestação periódica, como dado por (1), segue-se que o valor da taxa efetivamente cobrada, i^*, deve ser tal que:

$$(\bar{p}/\alpha) \{1 - (1 + i^*)^{-n}\} / i^* - (1 + i^*)^{-n} = (1 \quad \alpha - \varphi)/\alpha \tag{12}$$

Seguindo a exposição em Hawawini e Vora (1982), note-se que, adicionando-se a unidade a ambos os membros e efetuando-se algumas manipulações algébricas, a equação (12) pode ser reescrita como:

$$i^* + \bar{p}/\alpha = i^* \{ (1 \quad \varphi)/\alpha\} \{1 - (1 + i^*)^{-n}\}^{-1} \tag{13}$$

Como primeira aproximação para a determinação de i^*, $(1 + i^*)^{-n}$ será substituído por sua expansão em série de Taylor, a partir da origem, desprezando-se os termos que envolvam potências de i^* superiores a 2. Ou seja, faremos:

$$(1 + i^*)^{-n} = 1 - n.i^* + n(n + 1) \tag{14}$$

 Est. econ., São Paulo, 18(2):201-233, maio-ago. 1988

Logo, substituindo em (13), podemos escrever:

$$n\,(i^* + \bar{p}/\alpha) = \{(1 - \varphi)/\alpha\}\,\{1 - (n + 1)\,i^*/2\}^{-1} \tag{15}$$

Como segunda aproximação, substituiremos $\{1 \quad (n + 1)i^*/2\}^{-1}$ por sua expansão em série de Taylor, também a partir da origem, desprezando-se agora os termos que envolvam potências de i^* superiores a 1. Isto é, faremos:

$$\{1 - (n + 1)i^*/2\}^{-1} = 1 + (n + 1)i^*/2 \tag{16}$$

Deste modo, substituindo (16) em (15), decorre que o valor da aproximação para i^*, de acordo com a adaptação aqui apresentada da chamada fórmula de Todhunter, é dado por:

$$i^* = \frac{2\,(n.\bar{p} + \varphi - 1)}{(n + 1)\,(1 - \varphi) \quad 2.n.\alpha} \tag{17}$$

3.2.2. Adaptação da Fórmula de Karpin

Seguindo o trabalho original de Karpin (1967), observe-se, inicialmente, que a relação (13) pode ser reescrita como:

$$n\,(i^* + \bar{p}/\alpha)\,/\,\{(1 \quad \varphi)/\alpha\} = n.\,i^*/\{1 - (1 + i^*)^{-n}\} \tag{13'}$$

Desenvolvendo-se o segundo membro de (13') em série de Taylor, a partir da origem, e desprezando-se os termos que envolvem potências de i^* superiores a *2*, tem-se que:

$$n.i^*/\{1 - (1 + i^*)^{-n}\} = 1 + (n + 1)i^*/2 + (n^2 \quad 1)i^{*2}/12 \tag{18}$$

Deste modo, substituindo-se (18) em (13') e fazendo-se:

$$a = (n^2 - 1)/12 \tag{19}$$

$$b = (n + 1)/2 - n.\alpha/(1 \quad \varphi) \tag{20}$$

$$c = n.\bar{p}/(1 \quad \varphi) \quad 1 \tag{21}$$

segue-se que i^* será aproximada como a solução positiva da seguinte equação do segundo grau:

$$a.i^{*2} + b.i^{*} = c \qquad (22)$$

Em seu trabalho, ao invés de resolver diretamente a equação análoga à dada por (22), Karpin (1967) propôs que fosse adotado um dos dois seguintes procedimentos:

a) Desprezar, inicialmente, o termo que envolve a segunda potência de i^* em (22), obtendo-se a solução auxiliar $i_1^* = c/b$. Substituindo i_1^* de volta, no termo em $(i^*)^2$, tem-se: $c = b.i^* + a\ (c/b)i^*$. *Decorre, então, que:*

$$i^* = b.c/(a.c + b^2) \qquad (23)$$

b) Alternativamente, substituindo (23) no termo em $(i^*)^2$ de (22), tem-se:

$c = b.i^* + a\ \{b.c/\ (a.c + b^2)\}i^*$ Logo:

$$i^* = c\ (a.c + b^2)/\ \{b(b^2 + 2.a.c.)\} \qquad (24)$$

3.2.3. As Aproximações Iniciais de Newton-Raphson e de Boulding

O que está sendo aqui implicitamente sugerido é que, fazendo-se uso do algoritmo de Newton-Raphson, agora com:

$$V(i_k) = a_0 + p.a_{\overline{n}|\ i_k}\quad \alpha\ .E\ (1 + i)^{-n} \qquad (4")$$

e

$$V'(i_k) = p\{n\ (1 + i_k)^{-n-1}\quad a_{\overline{n}|\ i_k}\}/i_k + n.\alpha\ .E\ (1 + i)^{-n-1} \qquad (5")$$

tome-se como ponto de partida uma das fórmulas aproximadas de Todhunter ou de Karpin. Isto é, sendo i^* tal como dado por (17), (23) ou (24), faça-se $i_1 = i^*$, e lance-se mão da recursão dada por (3), com $V\ (i_k)$ e $V'\ (i_k)$ sendo respectivamente expressos pelas relações (4") e (5").

Alternativamente, e cabendo uma investigação numérica, podemos tomar i_1 como a primeira aproximação do algoritmo de Boulding (cf. BOULDING, 1936; DE FARO, 1983) ou a própria iteração inicial do método de Newton-Raphson, quando se parte da origem.

No caso de adoção da aproximação inicial de Boulding, sendo

$$d = 2\ (n.\overline{p} - \alpha)/\ \{n[\ (n + 1)\ \overline{p} - 2.\alpha]\} \qquad (25)$$

tome-se:

$$i_1 = \{(n.\bar{p} - \alpha) / (1 - \alpha \quad \varphi)\}^d - 1 \tag{26}$$

Por outro lado, partindo-se da origem, a iteração inicial do algoritmo de Newton-Raphson conduz à seguinte aproximação (cf. DE FARO, 1982a p. 117):

$$i_1 = 2(n.\bar{p} - 1 + \varphi) / \{n\,[(n + 1)\,\bar{p} \quad 2.\alpha]\} \tag{27}$$

3.2.4. Comparação Numérica

Uma vez apresentadas distintas alternativas para a determinação da primeira aproximação i_1, cabe agora coteja-las, isto é, devemos buscar elementos que nos permitam indicar qual das alternativas deve ser a utilizada na prática.

Para responder a indagação acima, adotaremos o critério de selecionar a alternativa que, como base em investigação empírica que passamos a descrever, apresente, em valor absoluto, o menor desvio com relação ao verdadeiro valor de i^*

Dado que as operações em estudo são de curto prazo, em geral não superiores a 6 meses, faremos com que o número de prestações periódicas, admitidas mensais, variem de 2 a 6(7). Quanto à taxa de juros i que é fixada na transação, investigaremos o caso, que acreditamos cobrir a maioria das operações observadas na prática corrente, onde a mesma varie de 5 a 12%, de 1 em 1%. Finalmente, com respeito ao coeficiente α de retenção de saldo médio, serão considerados, para cada combinação de número de prestações n e de taxa de juros i, respectivamente os valores 10%, 15%, 20% e, quando admissível, de maneira que se tenha ainda $\bar{p} - \alpha > 0$, 30%. Por simplificação, faremos $\varphi = 0$.

A tabela 1 apresenta, para cada combinação dos parâmetros n, i e α, o correspondente valor da taxa efetiva i^*, e o valor da aproximação inicial segundo, respectivamente, as relações (17), (23), (24), (26), (27) e como obtida tomando-se a raiz positiva da equação dada por (22). Adicionalmente, entre parêntesis e abaixo da respectiva aproximação, é indicado o valor absoluto do erro percentual com relação a i^*

A análise realizada indica que a relação (24) apresenta sempre a melhor aproximação para o valor i_1. Em termos médios(8), esta relação apresentou um

(7) O caso onde $n = 2$ é investigado somente para que a análise seja completa. Obviamente, o procedimento recomendado é o de resolver diretamente a resultante equação do segundo grau.

(8) Excluindo-se os casos onde $\bar{p} - \alpha < 0$.

TABELA 1

DESEMPENHO DAS APROXIMAÇÕES INICIAIS

Parâmetros *n-i (%) -α (%)*	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
2 - 5 - 10	6,1661	6,2370 (1,15)	6,1631 (0,05)	6,1639 (0,04)	6,1337 (0,53)	5,7034 (7,50)	6,1639 (0,04)
2 - 5 - 15	6,6671	6,7568 (1,35)	6,6630 (0,06)	6,6642 (0,04)	6,6292 (0,57)	6,1350 (7,98)	6,6642 (0,04)
2 - 5 - 20	7,2556	7,3710 (1,59)	7,2496 (0,08)	7,2515 (0,06)	7,2108 (0,62)	6,6372 (8,52)	7,2515 (0,06)
2 - 5 - 30	8,8028	9,0090 (2,34)	8,7891 (0,16)	8,7943 (0,10)	8,7404 (0,71)	7,9365 (9,84)	8,7942 (1,10)
2 - 6 - 10	7,5034	7,6078 (1,39)	7,4981 (0,07)	7,4969 (0,05)	7,4555 (0,64)	6,8285 (8,99)	7,4996 (0,05)
2 - 6 - 15	8,1101	8,2418 (1,62)	8,1026 (0,09)	8,1049 (0,06)	8,0539 (0,69)	7,3350 (9,56)	8,1049 (0,06)
2 - 6 - 20	8,8216	8,9910 (1,92)	8,8110 (0,12)	8,8145 (0,08)	8,7555 (0,75)	7,9225 (10,19)	8,8144 (0,08)
2 - 6 - 30	10,6878	10,9890 (2,82)	10,6635 (0,23)	10,6729 (0,14)	10,5957 (0,86)	9,4340 (11,73)	10,6726 (0,14)
2 - 7 - 10	8,8793	9,0245 (1,64)	8,8705 (0,10)	8,8731 (0,07)	8,8123 (0,75)	7,9485 (10,48)	8,8731 (0,07)
2 - 7 - 15	9,5936	9,7765 (1,91)	9,5814 (0,13)	9,5852 (0,09)	9,5151 (0,82)	8,5262 (11,13)	9,5851 (0,09)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação					
		(17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
2 - 7 - 20	10,4303	10,6653 (2,25)	10,4129 (0,17)	10,4187 (0,11)	10,3380 (0,88)	9,1944 (11,85)	10,4186 (0,11)
2 - 7 - 30	12,6193	13,0354 (3,30)	12,5799 (0,31)	12,5953 (0,19)	12,4906 (1,02)	10,9034 (13,60)	12,5948 (0,19)
2 - 8 - 10	10,2956	10,4895 (1,88)	10,2821 (0,13)	10,2861 (0,09)	10,2057 (0,87)	9,0634 (11,97)	10,2861 (0,09)
2 - 8 - 15	11,1196	11,3636 (2,19)	11,1008 (0,17)	11,1068 (0,12)	11,0143 (0,95)	9,7087 (12,69)	11,1066 (0,12)
2 - 8 - 20	12,0837	12,3967 (2,59)	12,0570 (0,22)	12,0661 (0,15)	11,9600 (1,02)	10,4530 (13,50)	12,0658 (0,15)
2 - 8 - 30	14,5997	15,1515 (3,78)	14,5396 (0,41)	14,5633 (0,25)	14,4273 (1,18)	12,3457 (15,44)	14,5624 (0,26)
2 - 9 -10	11,7544	12,0053 (2,13)	11,7344 (0,17)	11,7404 (0,12)	11,6372 (1,00)	10,1733 (13,45)	11,7403 (0,12)
2 - 9 - 15	12,6903	13,0058 (2,49)	12,6627 (0,22)	12,6715 (0,15)	12,5533 (1,08)	10,8827 (14,24)	12,6713 (0,15)
2 - 9 -20	13,7841	14,1881 (2,93)	13,7449 (0,28)	13,7583 (0,19)	13,6233 (1,17)	11,6984 (15,13)	13,7579 (0,19)
2 - 9 -30	16,6316	17,3410 (4,27)	16,5441 (0,53)	16,5791 (0,32)	16,4076 (1,35)	13,7615 (17,26)	16,5777 (0,32)
2 - 10 - 10	13,2577	13,5747 (2,39)	13,2293 (0,21)	13,2379 (0,15)	13,1088 (1,12)	11,2782 (14,93)	13,2377 (0,15)
2 - 10 - 15	14,3079	14,7059 (2,78)	14,2687 (0,27)	14,2813 (0,19)	14,1340 (1,22)	12,0482 (15,79)	14,2810 (0,19)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
2 - 10 - 20	15,5339	16,0428 (3,28)	15,4784 (0,36)	15,4976 (0,23)	15,3298 (1,31)	12,9310 (16,76)	15,4970 (0,24)
2 - 10 - 30	18,7179	19,6078 (4,75)	18,5950 (0,66)	18,6448 (0,39)	18,4339 (1,52)	15,1515 (19,05)	18,6425 (0,40)
2 - 11 - 10	14,8070	15,2004, (2,65)	14,7687 (0,26)	14,7806 (0,18)	14,6222 (1,250)	12,3781 (16,410)	14,8702 (0,19)
2 - 11 - 15	15,9747	16,4671 (3,08)	15,9209 (0,34)	15,9384 (0,23)	15,7583 (1,35)	13,2053 (17,34)	15,9379 (0,23)
2 - 11 20	17,3355	17,9641 (3,63)	17,2594 (0,44)	17,2860 (0,29)	17,0818 (1,46)	14,1509 (18,37)	17,2850 (0,29)
2 - 11 - 30	20,8614	21,9561 (5,25)	20,6940 (0,80)	20,7626 (0,47)	20,5084 (1,69)	16,5165 (20,83)	20,7590 (0,49)
2 - 12 - 10	16,4071	16,8856 (2,92)	16,3545 (0,32)	16,3707 (0,22)	16,1797 (1,39)	13,4731 (17,88)	16,3702 (0,22)
2 - 12 - 15	17,6935	18,2927 (3,39)	17,6212 (0,41)	17,6449 (0,27)	17,4284 (1,50)	14,3541 (18,87)	17,6441 (0,28)
2 - 12 - 20	19,1918	19,9557 (3,98)	19,0899 (0,53)	19,1259 (0,34)	18,8812 (1,62)	15,3584 (19,97)	19,1244 (0,35)
2 - 12 - 30	23,0653	24,3903 (5,74)	22,8426 (0,97)	22,9350 (0,56)	22,6336 (1,87)	17,8572 (22,58)	22,9298 (0,59)
3 - 5 - 10	6,3812	6,5360 (2,43)	6,3726 (0,13)	6,3766 (0,07)	6,3147 (1,04)	5,7804 (9,42)	6,3765 (0,07)
3 - 5 - 15	6,9668	7,1685 (2,90)	6,9541 (0,18)	6,9603 (0,09)	6,8896 (1,11)	6,2696 (10,01)	6,9601 (0,10)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
3 - 5 - 20	7,6670	7,9365 (3,52)	7,6475 (0,25)	7,6576 (0,12)	7,5777 (1,16)	6,8493 (10,67)	7,6573 (0,13)
3 - 5 - 30	9,5715	10,1010 (5,53)	9,5183 (0,56)	9,5501 (0,22)	9,4585 (1,18)	8,4034 (12,20)	9,5484 (0,24)
3 - 6 - 10	7,7923	8,0214 (2,94)	7,7768 (0,20)	7,7840 (0,11)	7,6931 (1,27)	6,9124 (11,29)	7,7838 (0,11)
3 - 6 - 15	8,7977	8,4998 (3,50)	8,4769 (0,27)	8,4882 (0,14)	8,3847 (1,35)	7,4813 (11,98)	8,4878 (0,14)
3 - 6 - 20	9,3434	9,7403 (4,25)	9,3085 (0,37)	9,3268 (0,18)	9,2103 (1,42)	8,1522 (12,75)	9,3261 (0,19)
3 - 6 - 30	11,6236	12,3967 (6,65)	11,5304 (0,80)	11,5870 (0,31)	11,4538 (1,46)	9,9338 (14,54)	11,5835 (0,34)
3 - 7 - 10	9,2551	9,5759 (3,47)	9,2293 (0,28)	9,2414 (0,15)	9,1151 (1,51)	8,0367 (13,16)	9,2410 (0,15)
3 - 7 - 15	10,0864	10,5026 (4,13)	10,0487 (0,37)	10,0675 (0,19)	9,9243 (1,61)	8,6795 (13,95)	10,0668 (0,19)
3 - 7 - 20	11,0750	11,6279 (4,99)	11,0178 (0,52)	11,0483 (0,24)	10,8875 (1,69)	9,4340 (14,82)	11,0468 (0,25)
3 - 7 - 30	13,7313	14,7992 (7,78)	13,5811 (1,09)	13,6737 (0,42)	13,4903 (1,76)	11,4193 (16,84)	13,6671 (0,47)
3 - 8 - 10	10,7730	11,2045 (4,01)	10,7329 (0,37)	10,7519 (0,20)	10,5834 (1,76)	9,1533 (15,03)	10,7511 (0,20)
3 - 8 - 15	11,7303	12,2888 (4,76)	11,6719 (0,50)	11,7014 (0,25)	11,5109 (1,87)	9,8644 (15,91)	11,7000 (0,26)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
3 - 8 - 20	12,8658	13,6054 (5,75)	12,7776 (0,69)	12,8251 (0,32)	12,6121 (1,97)	10,6952 (16,87)	12,8225 (0,34)
3 - 8 - 30	15,8993	17,3160 (8,91)	15,6714 (1,43)	15,8140 (0,54)	15,5710 (2,06)	12,8617 (19,11)	15,8026 (0,61)
3 - 9 - 10	12,3498	12,9125 (4,56)	12,2902 (0,48)	12,3188 (0,25)	12,1008 (2,02)	10,2623 (16,90)	12,3175 (0,26)
3 - 9 - 15	13,4355	14,1621 (5,41)	13,3490 (0,64)	13,3931 (0,32)	13,1476 (2,14)	11,0362 (17,86)	13,3908 (0,33)
3 - 9 - 20	14,7199	15,6794 (6,52)	14,5901 (0,88)	14,6609 (0,40)	14,3871 (2,26)	11,9363 (18,91)	14,6565 (0,43)
3 - 9 - 30	18,1328	19,9557 (10,05)	17,8026 (1,82)	18,0122 (0,67)	17,6997 (2,39)	14,2631 (21,34)	17,9935 (0,77)
3 - 10 - 10	13,9896	14,7059 (5,12)	13,9040 (0,61)	13,9455 (0,32)	13,6703 (2,28)	11,3636 (18,77)	13,9435 (0,33)
3 - 10 - 15	15,2063	16,1290 (6,07)	15,0827 (0,81)	15,1465 (0,39)	14,8374 (2,43)	12,1951 (19,80)	15,1428 (0,42)
3 - 10 - 20	16,6420	17,8571 (7,30)	16,4577 (1,11)	16,5594 (0,50)	16,2159 (2,56)	13,1579 (20,94)	16,5525 (0,54)
3 - 10 - 30	20,4372	22,7273 (11,21)	19,9758 (2,26)	20,2729 (0,80)	19,8799 (2,73)	15,6250 (23,55)	20,2436 (0,95)
3 - 11 - 10	15,6969	16,5913 (5,70)	15,5777 (0,76)	15,6361 (0,39)	15,2953 (2,56)	12,4575 (20,64)	15,6329 (0,41)
3 - 11 - 15	17,0475	18,1969 (6,74)	16,8760 (1,01)	16,9654 (0,48)	16,5839 (2,72)	13,3414 (21,74)	16,9597 (0,52)

continua

Parâmetros *n*-*i* (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
3 - 11 - 20	18,6372	20,1465 (8,10)	18,3829 (1,36)	18,5249 (0,60)	18,1018 (2,87)	14,3603 (22,95)	18,5142 (0,66)
3 - 11 - 30	22,8184	25,6410 (12,37)	22,1923 (2,74)	22,6012 (0,95)	22,1158 (3,08)	16,9492 (25,72)	22,5572 (1,14)
3 - 12 - 10	17,4767	18,5759 (6,29)	17,3146 (0,93)	17,3947 (0,47)	16,9793 (2,85)	13,5440 (22,50)	17,3899 (0,50)
3 - 12 - 15	18,9642	20,3735 (7,43)	18,7321 (1,22)	18,8545 (0,58)	18,3906 (3,02)	14,4753 (23,67)	18,8459 (0,62)
3 - 12 - 20	20,7109	22,5564 (8,91)	20,3686 (1,65)	20,5620 (0,72)	20,0490 (3,20)	15,5440 (24,95)	20,5462 (0,80)
3 - 12 - 30	25,2831	28,7081 (13,55)	24,4535 (3,28)	25,0027 (1,11)	24,4116 (3,45)	18,2371 (27,87)	24,9388 (1,36)
4 - 5 - 10	6,5553	6,8027 (3,77)	6,5380 (0,26)	6,5479 (0,11)	6,4523 (1,57)	5,8140 (11,31)	6,5475 (0,12)
4 - 5 - 15	7,1907	7,5188 (4,56)	7,1644 (0,37)	7,1804 (0,14)	7,0723 (1,65)	6,3291 (11,98)	7,1797 (0,15)
4 - 5 - 20	7,9562	8,4034 (5,62)	7,9143 (0,53)	7,9412 (0,19)	7,8213 (1,70)	6,9444 (12,72)	7,9398 (0,21)
4 - 5 - 30(*)	10,0636	10,9890 (9,20)	9,9388 (1,24)	10,0304 (0,33)	9,9065 (1,56)	8,6207 (14,34)	10,0230 (0,40)
4 - 6 - 10	8,0344	8,4043 (4,59)	8,0030 (0,39)	8,0212 (0,16)	7,8797 (1,93)	6,9444 (13,57)	8,0204 (0,17)
4 - 6 - 15	8,8005	9,2879 (5,54)	8,7531 (0,54)	8,7822 (0,21)	8,6227 (2,02)	7,5377 (14,35)	8,7807 (0,22)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
4 - 6 - 20	9,7193	10,3806 (6,80)	9,6445 (0,77)	9,6932 (0,27)	9,5164 (2,09)	8,2418 (15,20)	9,6902 (0,30)
4 - 6 - 30	12,2242	13,5747 (11,05)	12,0074 (1,77)	12,1696 (0,45)	11,9823 (1,98)	10,1351 (17,09)	12,1542 (0,57)
4 - 7 - 10	9,5805	10,1010 (5,43)	9,5281 (0,55)	9,5589 (0,23)	9,3605 (2,30)	8,0645 (15,82)	9,5573 (0,24)
4 - 7 - 15	10,4791	11,1643 (6,54)	10,4004 (0,75)	10,4493 (0,28)	10,2263 (2,41)	8,7282 (16,71)	10,4463 (0,31)
4 - 7 - 20	11,5522	12,4777 (8,01)	11,4291 (1,07)	11,5104 (0,36)	11,2635 (2,50)	9,5109 (17,67)	11,5045 (0,41)
4 - 7 - 30	14,4511	16,3170 (12,91)	14,1042 (2,40)	14,3684 (0,57)	14,1003 (2,43)	11,5894 (19,80)	14,3398 (0,77)
4 - 8 - 10	11,1994	11,9048 (6,30)	11,1170 (0,74)	11,1659 (0,30)	10,8986 (2,69)	9,1743 (18,08)	11,1630 (0,33)
4 - 8 - 15	12,2326	13,1579 (7,56)	12,1096 (1,01)	12,1870 (0,37)	11,8873 (2,82)	9,9010 (19,06)	12,1816 (0,42)
4 - 8 - 20	13,4614	14,7059 (9,24)	13,2709 (1,42)	13,3985 (0,47)	13,0668 (2,93)	10,7527 (20,12)	13,3880 (0,55)
4 - 8 - 30	16,7526	19,2308 (14,79)	16,2297 (3,12)	16,6348 (0,70)	16,2657 (2,91)	12,9870 (22,48)	16,5857 (1,00)
4 - 9 - 10	12,8975	13,8249 (7,19)	12,7737 (0,96)	12,8480 (0,38)	12,4986 (3,09)	10,2740 (20,34)	12,8431 (0,42)
4 - 9 - 15	14,0679	15,2801 (8,62)	13,8844 (1,30)	14,0012 (0,47)	13,6102 (3,25)	11,0565 (21,41)	13,9921 (0,54)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação					
		(17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
4 - 9 - 20	15,4543	17,0778 (10,51)	15,1726 (1,82)	15,3638 (0,59)	14,9311 (3,39)	11,9681 (22,56)	15,3462 (0,70)
4 - 9 - 30	19,1378	22,3325 (16,69)	18,3847 (3,94)	18,9777 (0,84)	18,4840 (3,42)	14,3312 (25,12)	18,8984 (1,25)
4 - 10 - 10	14,6821	15,8730 (8,11)	14,5028 (1,22)	14,6117 (0,48)	14,1653 (3,52)	11,3636 (22,60)	14,6036 (0,53)
4 - 10 - 15	15,9926	17,5439 (9,70)	15,7285 (1,65)	15,8987 (0,59)	15,4002 (3,70)	12,1951 (23,75)	15,8840 (0,68)
4 - 10 - 20	17,5391	19,6079 (11,80)	17,1371 (2,29)	17,4136 (0,72)	16,8618 (3,86)	13,1579 (24,98)	17,3854 (0,88)
4 - 10 - 30	21,6168	25,6410 (18,62)	20,5696 (4,84)	21,4070 (0,97)	20,7615 (3,96)	15,6250 (27,72)	21,2848 (1,54)
4 - 11 - 10	16,5616	18,0624 (9,06)	16,3090 (1,53)	16,4641 (0,59)	15,9043 (3,97)	12,4434 (24,87)	16,4514 (0,67)
4 - 11 15	18,0155	19,9637 (10,81)	17,6461 (2,05)	17,8871 (0,71)	17,2628 (4,18)	13,3172 (26,08)	17,8642 (0,84)
4 - 11 - 20	19,7250	22,3124 (13,12)	19,1677 (2,83)	19,5562 (0,86)	18,8645 (4,36)	14,3229 (27,39)	19,5128 (1,08)
4 -11 - 30	24,2005	29,1777 (20,57)	22,7852 (5,85)	23,9340 (1,10)	23,1047 (4,53)	16,8712 (30,29)	23,7528 (1,85)
4 - 12 - 10	18,5454	20,4082 (10,04)	18,1976 (1,88)	18,4136 (0,71)	17,7218 (4,44)	13,5135 (27,13)	18,3942 (0,82)
4 - 12 - 15	20,1466	22,5564 (11,96)	19,6416 (2,51)	19,9752 (0,85)	19,2045 (4,68)	14,4231 (28,41)	19,9405 (1,02)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
4 - 12 - 20	22, 0227	25,2109 (14,48)	21,2677 (3,43)	21,8009 (1,01)	20,9459 (4,89)	15,4639 (29,78)	21,7361 (1,30)
4 - 12 - 30	26,9015	32,9670 (22,55)	25,0321 (6,95)	26,5715 (1,23)	25,5212 (5,13)	18,0723 (32,82)	26,3107 (2,20)
5 - 5 - 10	6,7108	7,0588 (5,19)	6,6815 (0,44)	6,7007 (0,15)	6,5691 (2,11)	5,8258 (13,20)	6,6997 (0,17)
5 - 5 - 15	7,3754	7,8431 (6,31)	7,3320 (0,62)	7,3633 (0,19)	7,2153 (2,20)	6,3492 (13,94)	7,3614 (0,22)
5 - 5 - 20	8,1818	8,8235 (7,84)	8,1081 (0,90)	8,1618 (0,24)	7,9990 (2,23)	6,9767 (14,73)	8,1580 (0,29)
5 - 5 - 30(*)	10,3988	11,7647 (13,13)	10,1695 (2,21)	10,3600 (0,37)	10,1968 (1,94)	8,6957 (16,38)	10,3394 (0,57)
5 - 6 - 10	8,2578	8,7805 (6,33)	8,2042 (0,65)	8,2397 (0,22)	8,0429 (2,60)	6,9498 (15,84)	8,2376 (0,24)
5 - 6 - 15	9,0599	9,7561 (7,68)	8,9776 (0,91)	9,0351 (0,27)	8,8142 (2,71)	7,5472 (16,70)	9,0311 (0,32)
5 - 6 - 20	10,0222	10,9756 (9,51)	9,8901 (1,32)	9,9878 (0,34)	9,7443 (2,77)	8,2569 (17,61)	9,9797 (0,42)
5 - 6 - 30(*)	12,6406	14,6342 (15,77)	12,2449 (3,13)	12,5802 (0,48)	12,3214 (2,52)	10,1695 (19,55)	12,5381 (0,81)
5 - 7 - 10	9,8897	10,6329 (7,51)	9,7993 (0,91)	9,8599 (0,30)	9,5811 (3,12)	8,0614 (18,49)	9,8558 (0,34)
5 - 7 - 10	9,8897	10,6329 (7,51)	9,7993 (0,91)	9,8599 (0,30)	9,5811 (3,12)	8,0614 (18,49)	9,8558 (0,34)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação					
		(17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
5 - 7 - 15	10,8291	11,8144 (9,10)	10,6916 (1,27)	10,7890 (0,37)	10,4765 (3,26)	8,7227 (19,45)	10,7812 (0,44)
5 - 7 - 20	11,9497	13,2911 (11,23)	11,7318 (1,82)	11,8956 (0,45)	11,5501 (3,34)	9,5023 (20,48)	11,8798 (0,58)
5 - 7 -30(*)	14,9628	17,7215 (18,44)	14,3345 (4,20)	14,8780 (0,57)	14,4906 (3,16)	11,5703 (22,67)	14,8007 (1,08)
5 - 8 - 10	11,6157	12,6316 (8,75)	11,4723 (1,23)	11,5697 (0,40)	11,1897 (3,67)	9,1603 (21,14)	11,5621 (0,46)
5 - 8 - 15	12,6948	14,0351 (10,56)	12,4783 (1,71)	12,6338 (0,48)	12,2083 (3,83)	9,8765 (22,20)	12,6195 (0,59)
5 - 8 - 20	13,9749	15,7895 (12,98)	13,6364 (2,42)	13,8947 (0,57)	13,4229 (3,95)	10,7143 (23,33)	13,8666 (0,77)
5 - 8 -30(*)	17,3799	21,0526 (21,13)	16,4384 (5,42)	17,2679 (0,64)	16,7123 (3,84)	12,9023 (25,76)	17,1370 (1,40)
5 - 9 - 10	13,4466	14,7945 (10,02)	13,2288 (1,62)	13,3787 (0,50)	12,8755 (4,25)	10,2467 (23,80)	13,3655 (0,60)
5 - 9 - 15	14,6681	16,4384 (12,07)	14,3426 (2,22)	14,5796 (0,60)	14,0164 (4,44)	11,0092 (24,94)	14,5552 (0,77)
5 - 9 - 20	16,1098	18,4932 (14,79)	15,6069 (3,12)	15,9966 (0,70)	15,3697 (4,59)	11,8943 (26,17)	15,9493 (1,00)
5 - 9 - 30(*)	19,9065	24,6575 (23,87)	18,5567 (6,78)	19,7668 (0,70)	18,9952 (4,58)	14,1732 (28,80)	19,5576 (1,75)
5 - 10 - 10	15,3948	17,1429 (11,36)	15,0754 (2,07)	15,2979 (0,63)	14,6461 (4,86)	11,3208 (26,46)	15,2760 (0,77)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
5 - 10 - 15	16,7623	19,0476 (13,63)	16,2896 (2,82)	16,6384 (0,74)	15,9089 (5,09)	12,1212 (27,69)	16,5986 (0,98)
5 - 10 - 20	18,3686	21,4286 (16,66)	17,6471 (3,93)	18,2143 (0,84)	17,3989 (5,28)	13,0435 (28,99)	18,1385 (1,25)
5 - 10 - 30(*)	22,5596	28,5714 (26,65)	20,6897 (8,29)	22,3938 (0,73)	21,3490 (5,37)	15,3846 (31,80)	22,0744 (2,15)
5 - 11 - 10	17,4749	19,7015 (12,74)	17,0191 (2,61)	17,3405 (0,77)	16,5106 (5,52)	12,3827 (29,14)	17,3056 (0,97)
5 - 11 - 15	18,9926	21,8906 (15,26)	18,3249 (3,52)	18,8243 (0,89)	17,8948 (5,78)	13,2132 (30,43)	18,7617 (1,22)
5 - 11 - 20	20,7674	24,6269 (18,58)	19,7605 (4,85)	20,5634 (0,98)	19,5197 (6,01)	14,1631 (31,80)	20,4463 (1,55)
5 - 11 - 30(*)	25,3584	32,8358 (29,49)	22,8374 (9,94)	25,1712 (0,74)	23,7843 (6,21)	16,5414 (34,77)	24,7008 (2,59)
5 - 12 - 10	19,7040	22,5000 (14,19)	19,0678 (3,23)	19,5521 (0,92)	18,4790 (6,22)	13,4328 (31,83)	19,4680 (1,20)
5 - 12 - 15	21,3772	25,0000 (16,95)	20,4546 (4,32)	21,1539 (1,04)	19,9845 (6,51)	14,2857 (33,17)	21,0582 (1,49)
5 - 12 - 20	23,3254	28,1250 (20,58)	21,9512 (5,84)	23,0625 (1,13)	21,7429 (6,78)	15,2542 (34,60)	22,8869 (1,88)
5 - 12 - 30	28,3256	37,5000 (32,39)	25,0000 (11,74)	28,1250 (0,71)	26,3133 (7,10)	17,6471 (37,70)	27,4519 (3,08)
6 - 5 - 10	6,8582	7,3145 (6,65)	6,8133 (0,65)	6,8454 (0,19)	6,6749 (2,67)	5,8236 (15,09)	6,8435 (0,21)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
6 - 5 - 15	7,5449	8,1585 (8,13)	7,4744 (0,93)	7,5274 (0,23)	7,3361 (2,77)	6,3463 (15,89)	7,5235 (0,28)
6 - 5 - 20	8,3724	9,2227 (10,16)	8,2570 (1,38)	8,3485 (0,29)	8,1383 (2,80)	6,9721 (16,73)	8,3405 (0,38)
6 - 5 - 30(*)	10.6426	12,4777 (17,24)	10,2775 (3,43)	10,6073 (0,33)	10,3900 (2,37)	8,6849 (18,39)	10,5633 (0,75)
6 - 6 - 10	8,4756	9,1663 (8,15)	8,3926 (0,98)	8,4528 (0,27)	8,1950 (3,31)	6,9399 (18,12)	8,4484 (0,32)
6 - 6 - 15	9,3006	10,2240 (9,93)	9,1720 (1,38)	9,2701 (0,33)	8,9811 (3,44)	7,5296 (19,04)	9,2617 (0,42)
6 - 6 - 20	10,2876	11,5571 (12,34)	10,0801 (0,02)	10,2476 (0,39)	9,9280 (3,50)	8,2288 (20,01)	10,2303 (0,56)
6 - 6 - 30(*)	12,2539	15,6366 (20,71)	12,3291 (4,82)	12,9065 (9,37)	12,5464 (3,15)	10,1059 (21,99)	12,8178 (1,05)
6 - 7 - 10	10,1993	11,1898 (9,71)	10,0579 (1,39)	10,1618 (0,37)	9,7922 (3,99)	8,0407 (21,16)	10,1530 (0,45)
6 - 7 15	11,1644	12,4809 (11,79)	10,9481 (1,94)	11,1157 (0,44)	10,7011 (4,15)	8,6864 (22,20)	11,0990 (0,59)
6 - 7 - 20	12,3115	14,1088 (14,60)	11,9676 (2,79)	12,2498 (0,50)	11,7885 (4,25)	9,4449 (23,28)	12,2163 (0,77)
6 - 7 - 30(*)	15,3665	19,0884 (24,22)	14,3793 (6,42)	15,3111 (0,36)	14,7523 (4,00)	11,4433 (25,53)	15,1504 (1,41)
6 - 8 - 10	12,0434	13,4100 (11,35)	11,8163 (1,89)	11,9856 (0,48)	11,4751 (4,72)	9,1265 (24,22)	11,9691 (0,62)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
6 - 8 - 15	13,1514	14,9573 (13,73)	12,8082 (2,61)	13,0782 (0,56)	12,5051 (4,91)	9,8177 (25,35)	13,0475 (0,79)
6 - 8 - 20	14,4594	16,9082 (16,94)	13,9229 (3,71)	14,3709 (0,61)	13,7289 (5,05)	0,6222 (26,54)	14,3110 (1,03)
6 - 8 - 30(*)	17,9009	22,8758 (27,79)	16,4284 (8,23)	17,8459 (0,31)	17,0191 (4,93)	2,7042 (29,03)	17,5759 (1,82)
6 - 9 - 10	14,0251	15,8570 (13,06)	13,6760 (2,49)	13,9397 (0,61)	13,2540 (5,50)	10,1975 (27,29)	13,9108 (0,81)
6 - 9 - 15	15,2794	17,6867 (15,76)	14,7585 (3,41)	15,1744 (0,69)	14,4033 (5,73)	10,9242 (28,50)	15,1216 (1,03)
6 - 9 - 20	16,7514	19,9937 (19,36)	15,9497 (4,79)	16,6300 (0,72)	15,7600 (5,92)	11,7625 (29,78)	16,5290 (1,33)
6 - 9 - 30(*)	20,5806	27,0502 (31,44)	18,4757 (10,23)	20,5395 (0,20)	19,3599 (5,93)	13,8950 (32,49)	20,1111 (2,28)
6 - 10 - 10	16,1647	18,5676 (14,87)	15,6459 (3,21)	16,0431 (0,75)	15,1404 (6,34)	11,2540 (30,38)	15,9947 (1,05)
6 - 10 - 15	17,5701	20,7108 (17,88)	16,8057 (4,35)	17,4250 (0,83)	16,4077 (6,62)	12,0069 (31,66)	17,3379 (1,32)
6 - 10 - 20	19,2102	23,4114 (21,87)	18,0520 (6,03)	19,0504 (0,83)	16,4077 (14,59)	12,0069 (37,50)	18,8875 (1,68)
6 - 10 - 30(*)	23,4331	31,6742 (35,17)	20,5220 (12,42)	23,4261 (0,03)	21,7890 (7,02)	15,0215 (35,90)	22,7750 (2,81)
6 - 11 - 10	18,4873	21,5868 (16,77)	17,7361 (4,06)	18,3190 (0,91)	17,1484 (7,24)	12,2964 (33,49)	18,2405 (1,33)

continua

Parâmetros n-i (%) -α (%)	i^* (%)	Valor Percentual de i_1 Segundo a Relação (17)	(23)	(24)	(26)	(27)	(22)
6 - 11 - 15	20,0498	24,0776 (20,09)	18,9572 (5,45)	19,8551 (0,97)	18,5325 (7,57)	13,0664 (34,83)	19,7166 (1,66)
6 - 11 - 20	21,8637	27,2181 (24,49)	20,2341 (7,45)	21,6603 (0,93)	20,1460 (7,86)	13,9392 (36,75)	21,4069 (2,09)
6 - 11 - 30(*)	26,4910	36,8245 (42,97)	22,5769 (17,40)	26,5464 (0,52)	24,3229 (9,44)	16,0886 (42,60)	25,5997 (4,07)
6 - 12 - 10	21,0235	24,9703 (18,77)	19,9581 (5,07)	20,7960 (1,08)	19,2947 (0,22)	13,3249 (36,62)	20,6723 (1,67)
6 - 12 - 15	22,7507	27,8515 (22,42)	21,2212 (6,72)	22,4961 (1,12)	20,7949 (8,60)	14,1034 (38,01)	22,2819 (2,06)
6 - 12 - 20	24,7463	31,4843 (27,23)	22,5007 (9,07)	24,4950 (1,02)	22,5330 (8,94)	14,9786 (39,47)	24,1117 (2,56)
6 - 12 - 30(*)	29,7942	42,5963 (42,97)	24,6105 (17,40)	29,9502 (0,52)	26,9811 (9,44)	17,1010 (42,60)	28,5812 (4,07)

Notas: Valores entre parênteses denotam o valor absoluto do erro relativo em termos percentuais.
(*) $\bar{p} - \alpha < 0$

erro de aproximação da ordem de 0,45%. A segunda aproximação mais acurada é obtida tomando-se a raiz positiva da equação definida pela relação (22), cujo erro médio observado foi da ordem de 0,62%. As demais aproximações deixaram, em geral, muito a desejar.

Deste modo, com base na investigação empírica apresentada, pode-se concluir que a estratégia que deve ser adotada para a determinação da taxa efetiva i^* é a que consiste em, via aplicação do algoritmo de Newton-Raphson, refinar a aproximação inicial fornecida pela versão adaptada da fórmula de Karpin, como expressa pela relação (24). Portanto, sendo i_1 igual ao valor derivado de (24), deve ser feito uso, se necessário, da recursão dada por (3), com $V(i_p)$ como dado por (4") e $V'(i_k)$ como dado por (5").

Concluindo a análise do caso onde, havendo exigência de saldo médio *a posteriori,* temos $\bar{p} - \alpha > 0$, deve-se observar que a investigação empírica apresentada confirma, como indicado pelo bom senso, que a taxa efetiva i^* é crescente tanto com a taxa i quanto com o fator de retenção α. Ainda mais, mantidos fixos i e α, vemos também que i^* cresce com o número de prestações n.

3.3. Prestação Inferior ao Saldo Médio

Consideremos agora, por fim, a situação onde o saldo médio excede o valor da prestação. Em tal eventualidade, o fluxo de caixa (10) caracteriza-se pelo fato de apresentar exatamente duas variações de sinais, já que $a_n = p - \alpha.E$ será negativo. Ademais, procedendo-se à soma algébrica dos fluxos, temos que:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = E(n + 1)i/[2 - (n + 1)i] + T \qquad (28)$$

relação que, uma vez satisfeita a condição necessária $n < 1/i$, com $0 < i < 1$, é positiva mesmo que não haja tributação $(T = 0)$. Deste modo, em função do trabalho de Jean (1968 e 1969), sabemos que a tal fluxo correspondem exatamente duas taxas internas de retorno: uma positiva e outra negativa. Logo, formalmente, temos o colapso do conceito da TIR, visto não haver unicidade.
Para a determinação do custo efetivo para o tomador, temos duas alternativas: a) considerar somente a taxa interna positiva; b) usar o conceito de taxa de retorno sobre o capital investido (ou taxa interna de retorno generalizada).

3.3.1. Consideração da Taxa Interna de Retorno Positiva

Uma possível linha de ação é desprezar a taxa interna de retorno negativa e definir o custo efetivo para o tomador como sendo igual à taxa interna do retorno positiva do fluxo de caixa dado por (20). Para que tal alternativa seja aceitável, é preciso que os resultados dela derivados não contradigam o bom senso. Isto é, ela deve ser tal que o custo efetivo i^* continue sendo uma função crescente tanto do coeficiente α, como da taxa i e do número de prestações n. Cabe agora, portanto, realizar uma investigação a este respeito.

Na investigação empírica efetuada no item 3.2.4 verificou-se que para certas combinações dos parâmetros n e i, e $\alpha = 30\%$, ocorreram alguns casos onde $\bar{p} - \alpha < 0$. Para tais casos, que aparecem identificados na tabela 1, cons-

TABELA 2

ADOCÃO DE $i^* > 0$ COM $\overline{p} - \alpha < 0$

Parâmetros n - i (%)	i^* (%)	i_1 (%)	Parâmetros n - i (%)	i^* (%)	i_1 (%)
3 - 5	12,6384	12,5836 (0,43)	5 - 7	19,6370	19,7329 (0,49)
3 - 6	15,2482	15,1599 (0,58)	5 - 8	22,5605	22,7662 (0,91)
3 - 7	17,9029	17,7721 (0,73)	5 - 9	25,5841	25,9517 (1,44)
3 - 8	20,6098	20,4275 (0,88)	5 10	28,7312	29,3233 (2,06)
4 - 5	13,5070	13,4445 (0,46)	5 - 11	32,0267	32,9183 (2,78)
4 - 6	16,2365	16,1509 (0,53)	5 - 12	35,4990	36,7789 (3,61)
4 - 7	19,0120	18,9064 (0,56)	6 - 5	14,2826	14,4089 (0,88)
4 8	21,8473	21,7286 (0,54)	6 - 6	17,1090	17,3788 (1,58)
4 - 9	24,7562	24,6357 (0,49)	6 - 7	20,0129	20,5020 (2,44)
4 - 10	27,7530	27,6463 (0,38)	6 - 8	23,0254	63,8256 (3,48)
4 - 11	30,8526	30,7806 (0,23)	6 - 9	26,1787	27,4001 (4,67)
4 - 12	34,0715	34,0601 (0,03)	6 - 10	29,5085	31,2821 (6,01)
5 - 5	14,0035	13,9960 (0,05)	6 - 11	33,0557	35,5373 (7,51)
5 - 6	16,7919	16,8198 (0,17)	6 - 12	36,8685	40,2445 (9,16)

Nota: Valores entre parênteses denotam o valor absoluto do erro relativo percentual.

tata-se que: a) o valor derivado da relação (24) prevê uma excelente aproximação para a respectiva taxa interna de retorno, positiva i^*; b) O valor de i^* cresce com α. Buscando verificar a robustez de tais inferências, a análise numérica foi estendida de modo a incluir o caso onde $\alpha = 40\%$. Assim, na tabela 2, para os valores de n e de i tais que, para $\alpha = 0{,}4$, tem-se $\bar{p} - \alpha < 0$[9], são apresentados os correspondentes valores da taxa interna de retorno positiva, i^*, e da aproximação inicial i_1 obtida através da relação (24).

Os resultados apresentados na tabela 2 dão margem às seguintes conclusões: a) o valor da taxa interna positiva i^* cresce com α, com n e com i; b) a qualidade da aproximação inicial i_1 derivada da aplicação da relação (24) deteriora-se à medida que crescem os valores de n e de i[10]. Conseqüentemente, parece ser válida a alternativa que consiste em tomar como o custo efetivo do empréstimo, no caso de saldo médio *a posteriori* com $\bar{p} - \alpha < 0$, a taxa interna de retorno positiva do resultante fluxo de caixa (tal como dado por (10)).

A adequabilidade do emprego da taxa interna de retorno positiva como medida do custo efetivo i^* para o tomador do financiamento é facilmente justificada quando se concentra atenção no caso onde $n = 2$. Nesta eventualidade, supondo-se um empréstimo unitário e tendo em vista o fluxo de caixa dado por (10), segue-se que, resolvendo-se a equação do 2º grau resultante, que se faz presente se $\bar{p} \neq \alpha$, o valor de i^* é dado por[11]:

$$i^* = (3\bar{p} \quad 2\alpha - \mu)/(\mu) - \bar{p}) \tag{29'}$$

onde

$$\mu = \bar{p}^2 + 4(\bar{p} - \alpha)(1 - \alpha - \varphi) \tag{29''}$$

Fixando-se $i = 10\%$ por período, o que implica que $\bar{p} = 0{,}588235$, $\varphi = 0$ e lançando-se mão de (29'), o comportamento de i^* em função de α é sumariado na tabela 3.

Como se verifica, corroborando o resultado da análise numérica anterior, independentemente do sinal da diferença $\bar{p} - \alpha$, o valor de i^* cresce com a proporção do saldo médio α.

Resta ainda, entretanto, a questão relativa à determinação numérica da taxa de retorno positiva. A rigor, a aplicabilidade do algoritmo de Newton-Ra-

(9) Observe-se que isto nunca acontece, para os valores de i considerados, quando $n = 2$.

(10) Em particular, para certos casos onde $n = 6$, tal aproximação é menos acurada que a obtida considerando-se a raiz positiva da equação dada por (22).

(11) Observe-se que, no caso limite onde $\alpha = \bar{p}$ a relação (29') tende para o valor correto dado por $i^* = (2\bar{p} - 1 + \varphi)/(1 - \bar{p} - \varphi)$.

TABELA 3

COMPORTAMENTO DE i^* EM FUNÇÃO DE α

α (%)	i^* (%)	α (%)	i^* (%)
30	18,7179	$\alpha = \overline{p}$	42,8571
40	23,4520	59	43,1714
50	31,1071	60	45,0309
55	36,9244	65	56,8137
58	41,4423	70	74,7608

phson não é assegurada. Isto porque, para a classe de projetos caracterizada por duas variações de sinais na seqüência de seus fluxos de caixa, a função valor atual não só não é monótona como muda de concavidade. Entretanto, dada a robustez do método (cf. SANTOS, 1982, p. 62-78), sugerimos que, partindo da aproximação inicial i_1 como dada pela relação (24), o algoritmo de Newton-Raphson seja utilizado da mesma forma que no caso onde $\overline{p} - \alpha > 0$. Se, porventura, ocorrer colapso, deverá ser feito uso de procedimentos alternativos, tais como o algoritmo de Boulding ou o método da bisseção. Para tanto, veja-se de FARO (1985a, p. 133-151).

3.3.2. Uso da Taxa Interna de Retorno Generalizada

Especificamente com vistas a casos de projetos com mais de uma taxa interna de retorno, foi desenvolvida uma metodologia alternativa que também faz uso explícito da taxa de juros ρ que vigora no mercado de capitais, embora em um sentido diferente do empregado no conceito da perda P que discutimos na seção 2.1. Esta metodologia, originalmente sugerida por Duguid e Laski (1964) e Teichroew, Robichek e Montalbano (1965a, b), gera, como proposto por Mao (1969), a chamada taxa de retorno sobre o capital investido, ou taxa interna de retorno generalizada (TIRG).

A TIRG goza da propriedade de sempre existir e ser única, sendo, pois, livre de ambigüidades(12). Deste modo, parece-nos apropriado investigar a aplicação da TIRG como medida do custo efetivo para o tomador de empréstimo, no caso onde a exigência de saldo médio *a posteriori* é tal que $\bar{p} - \alpha < 0$.

Para tanto, supondo que $2\bar{p} - \alpha < 0$, o que se afigura como uma imposição bastante razoável, faremos uso do apresentado em de FARO (1987).

Denotando a TIRG por $\hat{i}$, temos que, na situação considerada, ela será definida como a taxa interna de retorno, no sentido usual, do fluxo de caixa seguinte, que contém exatamente $n - 1$ períodos:

$$a_j = \begin{cases} -(1 - \alpha - \varphi),\ j = 0 \\ \bar{p},\ j = 1,\dots,n-2 \\ \bar{p} + (\bar{p} - \alpha)(1 + \rho)^{-1},\ j = n - 1 \end{cases} \tag{30}$$

Como o fluxo de caixa acima, para $\rho > 0$, cujo caso é de interesse prático, apresenta uma única variação de sinal, segue-se que $\hat{i}$ existe sempre e é única, sento tal que(13):

$$1 - \alpha - \varphi = \bar{p}.a_{\overline{n-1|}\,\hat{i}} + (\bar{p} - \alpha)(1 + \rho)^{-1}(1 + \hat{i})^{1 \quad n} \tag{31}$$

Para que a taxa interna de retorno generalizada $\hat{i}$ possa ser tomada como o custo de empréstimo, é necessário que seu valor seja crescente tanto com α, n e i, como também com ρ. Como, em geral, não dispomos de solução analítica para i^*, iremos nos concentrar apenas no caso de duas prestações, quanto isto é possível.

Para $n = 2$, decorre imediatamente de (31) que a TIRG $\hat{i}$ pode ser explicitada de tal modo que:

$$\hat{i} = \{\bar{p} + (\bar{p} - \alpha)(1 + \rho)^{-1}\}/(1 - \alpha - \varphi) - 1 \tag{32}$$

É, pois, de conclusão imediata que $\partial\hat{i}/\partial\rho > 0$, que $\partial\hat{i}/\partial\alpha > 0$ e que $\partial\hat{i}/\partial\bar{p} > 0$. Por outro lado, observando que, como decorre de (1), $\partial\bar{p}/\partial\hat{i} > 0$, segue-se que, tendo em vista a regra da derivação em cadeia, que também $\partial\hat{i}/\partial\hat{i} > 0$. Deste modo, fica comprovada a adequabilidade do conceito da TIRG como medida do custo efetivo para o tomador do empréstimo.

Para o caso onde $n = 3$, uma solução analítica para a TIRG $\hat{i}$ é também possível. Basta tomar a raiz positiva da equação do segundo grau em $\hat{i}$ que de-

(12) Veja-se, por exemplo, DE FARO (1985a, p. 163-171) para uma discussão das propriedades da TIRG.

(13) Note que, como a soma dos fluxos é positiva, teremos $\hat{i} > 0$.

corre de (31). Para $n > 3$, deve-se usar o algoritmo de Newton-Raphson, fazendo-se uso da recursão dada por (3), sendo agora:

$$V(i_k) = \bar{p}.a_{\overline{n-1}|}\, i_k + (\bar{p} - \alpha)(1 + \rho)^{-1}(1 + i_k)^{1-n} - 1 + \alpha + \varphi \qquad (33)$$

e

$$V'(i_k) = \bar{p}\{(n-1)(1+i_k)^{-n-1} - a_{\overline{n-1}|}\, i_k\}/i_k + $$
$$+ (1-n)(\bar{p} - \alpha)(1+\rho)^{-1}(1+i_k)^{-n} \qquad (34)$$

Quanto a obtenção de uma aproximação inicial, observe-se que, fazendo-se:

$$R = \bar{p}(1 + \rho)/(\bar{p} - \alpha) \qquad (35)$$

$$\upsilon = (1 - \alpha - \varphi)(1 + \rho)/(\alpha - \bar{p}) \qquad (36)$$

e

$$h = n - 1$$

a relação (31) pode ser reescrita como:

$$R\{1 - (1 + \hat{\imath})^{-h}\}/\hat{\imath} - (1 + \hat{\imath})^{-h} = \upsilon \qquad (31')$$

que é análoga à relação (12).

Segue-se, então, que podemos fazer uso do mesmo procedimento utilizado para obter-se a aproximação inicial discutida no item 3.2. Deste modo, sendo agora

$$a = (h^2 - 1)/12 \qquad (38)$$

$$b = (h + 1)/2 - h/(1 + \upsilon) \qquad (39)$$

$$c = h.R/(1 + \upsilon) - 1 \qquad (40)$$

segue-se que a aproximação inicial para $\hat{\imath}$ será dada pela aplicação da relação (24).

Conclusão

Estudamos aqui o problema da determinação do custo efetivo de um empréstimo bancário, com exigência de reciprocidade explicitada em termos de saldo médio, na hipótese de que o mesmo deva ser resgatado por intermédio de prestações periódicas.

No caso dito de exigência *a priori*, constata-se a falência da metodologia clássica baseada no conceito da taxa interna de retorno. Em tal eventualidade, deve ser utilizada a idéia do custo de oportunidade para o cliente, imputando-se explicitamente a perda incorrida com a obrigatoriedade do depósito prévio.

Havendo exigência *a posteriori*, pode-se dizer que, formalmente, no sentido de não ser satisfeito o requisito de unicidade de solução, pode ou não haver a falência da metodologia da taxa interna de retorno. No caso em que o resultante fluxo de caixa mantiver uma única variação de sinal, garante-se a unicidade da solução, sendo que tal solução pode ser eficientemente computada via aplicação do algoritmo de Newton-Raphson, tomando-se como ponto de partida a aproximação obtida por intermédio da adaptação que se obteve para a fórmula de Karpin. Caso ocorram duas variações de sinal no fluxo de caixa, o que acontece quando o valor do saldo médio excede ao da prestação constante, temos o problema da existência de duas soluções para a taxa interna de retorno. Como vimos, em tal situação, uma alternativa é considerar somente a taxa interna de retorno positiva, que também é aproximada pela adaptação da fórmula de Karpin. Uma outra possibilidade é o emprego do conceito da taxa interna de retorno generalizada, que, do mesmo modo que no caso de exigência *a priori*, leva também em conta a taxa de juros vigente no mercado de capitais. Como indicado, esta taxa generalizada pode, por sua vez, ser aproximada pela adaptação da fórmula de Karpin.

Referências Bibliográficas

BOULDING, K.E. Time and investment. *Economica, 3*(10):196-220, 1936.

DE FARO, C. *Matemática financeira.* 9. ed. São Paulo, Atlas, 1982 (a).

———. Determinação da taxa de rentabilidade de letras de câmbio. *Revista Brasileira de Mercado de Capitais, 8*(24):191-199, 1982 (b).

———. Determinação numérica da taxa interna de retorno: Confronto entre os algoritmos de Boulding e de Wild. *Revista Brasileira de Economia, 37*(3): 279-312, 1983.

———. *A eficiência marginal do capital como critério de avaliação econômica de projetos de investimentos.* Rio de Janeiro, IBMEC/PNPE, 1985(a).

——— Empréstimos bancários: a questão do saldo-médio. *Previsão e Análise, 1* (9): 19-21, 1985(b).

———. Taxa de retorno sobre o capital investido e projetos com duas variações de sinal. *Revista Brasileira de Mercado de Capitais,* 1987 (no prelo).

DUGUID, A. M. & LASKI, J. G. The financial attractiveness of a project: a method of assessing it. *Operational Research Quarterly, 15*(4):317-328, 1964.

HAWAWINI, G. & VORA, A. Yield approximations: a historical perspective. *The Journal of Finance, 37*(1):145-156, 1982.

JEAN, W. H. On multiple rates of return. *The Journal of Finance, 23*(1):187-191, 1968.

———. On multiple rates of return. *The Journal of Finance, 24*(1):99-100, 1969.

KARPIN, H. Simple algebraic formulae for estimating the rate of interest. *Journal of the Institute of Actuaries, 93:*297-309, 1967.

MAO, J. C. T. *Quantitative analysis of financial decisions.* New York, The Macmillan Co, 1969.

SANTOS, V. R. B. *Curso de cálculo numérico.* 4. ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982.

TEICHROEW, D. *et alii.* Mathematical analysis of rates of return under certainty. *Management Science, 11*(3):395-403, 1965(a).

———. An analysis of criteria for investment and financing decisions under certainty. *Management Science, 12*(3):151-179, 1965(b).

(Originais recebidos em fevereiro de 1988).