Resolução comentada da questão 1 da P1 de 2015 da disciplina PME3230 - Mecânica dos Fluidos I

Caio Cancian

Março 2016

Resumo

A primeira questão da P1 de 2015 da disciplina PME3230 - Mecânica dos Fluidos I obteve um índice de acerto extremamente baixo, essencialmente pela necessidade de possuir certo domínio de técnicas básicas de resolução de equações diferenciais. No entanto, essas técnicas só foram aprendidas no curso de cálculo em um momento mais avançado do semestre. Por isso, esse texto busca resolver essa questão da prova, de modo a explicitar quais eram esses conhecimentos extras necessários para poder resolvê-la corretamente.

Palavras-chave: mecânica dos fluidos; atrito viscoso; equações diferenciais ordinárias;

1 Introdução

A questão número 1 da primeira prova, ocorrida em 04/09/2015, da disciplina PME3230 - Mecânica dos Fluidos I, que é oferecida aos alunos das engenharias mecânica, mecatrônica e naval, foi marcada por um índice de acerto muito baixo. Como é possível perceber pelo enunciado (reproduzido a seguir), a questão se tratava da obtenção e resolução de uma equação diferencial a fim de modelar o escorregamento de um bloco em uma mesa lubrificada:

> "**1ª Questão (3,0 pontos).**
>
> Um cubo de aço de massa $\mathbf{m = 1\ kg}$ e aresta $\mathbf{b = 5\ cm}$, extremamente polido, é lançado com velocidade inicial $V_0 = \mathbf{20\ m/s}$ sobre uma mesa plana que contém óleo ($\mu = \mathbf{0{,}1\ Pa.s}$). O filme de óleo que se forma entre as superfícies da mesa e do cubo tem espessura $\mathbf{h = 0{,}1\ mm}$.
> Considerando uma distribuição linear de velocidades no filme de óleo, determine:
>
> 1. As equações horárias em termos literais para a velocidade $\mathbf{V = V(t)}$ e deslocamento do bloco $\mathbf{x = x(t)}$ em função das variáveis **m, b,** V_0**, h,** μ e **t**; (2,0 pontos)
> 2. O tempo necessário para que o bloco alcance a velocidade de **0,1 m/s**; (0,5 pontos)
> 3. A distância percorrida pelo bloco até alcançar velocidade de **0,1 m/s**. (0,5 pontos)"

O possível problema com a questão foi a necessidade de encontrar e resolver uma equação diferencial no item 1 não só para poder respondê-lo, como também para poder encontrar a resposta dos itens 2 e 3. Soma-se a isso o fato dos alunos, no período da aplicação da prova, não terem aprendido ainda durante as disciplinas de cálculo técnicas de resolução de equações diferenciais.

Dessa forma, o presente texto pretende desenvolver rapidamente os conceitos mais matemáticos envolvidos na formulação do problema, de modo a tornar mais clara a sua solução. Além disso, serão apresentados comentários gerais úteis à resolução de questões que se assemelhem a essa apresentada.

2 Equacionamento do problema

O primeiro passo para resolução dessa questão é identificar a necessidade de se aplicar a segunda lei de Newton no cubo de aço, de modo a obter uma expressão para sua aceleração, o que permite encontrar as expressões para a velocidade e posição pedidas no item 1.

Afinal, no caso unidimensional, como dessa questão, a segunda lei de Newton diz que:

$$F_R = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

o que deixa claro que a solução de (1), que é uma equação diferencial ordinária (ou EDO), de fato poderá nos fornecer $x(t)$ e, consequentemente, $v(t) = dx/dt$.

O problema passa a ser então, nesse primeiro momento, o de encontrar uma expressão analítica para a força resultante F_R que atua no cubo, uma vez que só assim a EDO fornecida pela segunda lei de Newton ficará completamente determinada. E, para fazer isso, é preciso aplicar os conceitos de tensão de cisalhamento e viscosidade que, teoricamente, são aprendidas durante as aulas da disciplina.

Em particular, é preciso usar a chama lei da viscosidade de Newton, dada por:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} \tag{2}$$

em que τ é a tensão de cisalhamento no fluido, μ sua viscosidade e du/dy é o gradiente do campo de velocidade na direção do deslocamento do fluido.

Com essa expressão é possível determinar F_R, já que, sendo τ uma tensão, pode ser escrita como a razão de uma força (F) por uma área (A). Do enunciado, sabemos que o cubo é liberado na mesa com óleo, de modo que a única força que age sobre ele na direção do movimento é devida à reação do fluido ao sofrer cisalhamento pelo contato com o cubo. Assim, por ação e reação, a resultante no cubo será uma força de mesma magnitude de F, mas com sinal contrário, ou seja $F_R = -F$ e, portanto:

$$F_R = -\tau A \tag{3}$$

Combinando as equações (1), (2) e (3), obtém-se então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{du}{dy}A \tag{4}$$

que precisa ser um pouco mais desenvolvida para ficar apenas em termos das variáveis do problema. Em primeiro lugar, a área A é a área de contato entre o cubo e o óleo, ou seja, é a área da face inferior desse cubo, cuja aresta é dada no enunciado e vale b. Assim $A = b^2$ e tem-se:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{du}{dy}b^2 \tag{5}$$

Resta determinar o gradiente de velocidade. O próprio enunciado diz que ele deve ser considerado linear no filme de óleo, o que significa que ele será simplesmente a razão entre a diferença de velocidades das extremidades desse filme, dividida por sua espessura. Considerando que o óleo adere perfeitamente às superfícies, tem-se que $u_{mesa} = 0$ e $u_{bloco} = v$ além de que, do enunciado, a espessura do filme é h. Então:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{v}{h} \tag{6}$$

Além disso, lembrando que $v = dx/dt$, tem-se que:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{h}\frac{dx}{dt} \tag{7}$$

de modo que substituindo (7) em (5), e reorganizando os termos, obtém-se finalmente a EDO que descreve o comportamento da situação da questão:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu b^2}{mh}\frac{dx}{dt} \tag{8}$$

ou, em termos da velocidade do cubo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu b^2}{mh}v \tag{9}$$

3 Solução das equações

Após ter equacionado o problema usando os conceitos físicos desenvolvidos durante as aulas, o passo crucial da resolução da questão (para obter alguma pontuação) é achar as soluções dessas equações. E, nesse ponto, pode ter ocorrido a maior dificuldade geral, uma vez que as equações obtidas são EDOs de primeira ordem para a velocidade e de segunda ordem para a posição.

Felizmente, essas equações diferenciais pertencem a uma categoria que permite utilizar técnicas de resolução relativamente simples e diretas, o que de maneira geral não é verdade para a resolução de EDOs. Mesmo assim, é interessante explicitar alguns aspectos referentes a essa categoria de equações e suas soluções para, depois disso, aplicar na questão da prova.

3.1 EDOs de primeira ordem separáveis

De forma breve, uma equação diferencial ordinária é uma equação que relaciona uma função de uma única variável e suas derivadas. A ordem dessa equação é definido pela ordem da maior derivada presente. Assim, uma EDO genérica de primeira ordem para um função $y = y(x)$ tem a forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{10}$$

em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer que relaciona as variáveis independente (x) e dependente (y).

Particularmente, uma EDO de primeira ordem é dita ser **separável** se pode ser escrita na forma:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{11}$$

sendo $P(x)$ uma função qualquer *apenas* de x e $Q(y)$ uma função qualquer *apenas* de y. A vantagem de uma EDO ser separável consiste no fato de suas soluções poderem ser obtidas através de uma integração direta, em suas respectivas variáveis, das funções $P(x)$ e $Q(y)$. Isto é, a solução geral é dada simplesmente por:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \tag{12}$$

em que C é uma constante arbitrária de integração e que, eventualmente, pode ser determinada por condições iniciais ou de contorno.

3.2 Solução da EDO da questão

Para poder utilizar essas ideias de resolução de EDOs separáveis, em primeiro lugar, é preciso estar trabalhando com equações diferenciais de primeira ordem. No caso da questão da prova, apesar da equação (8) ser de segunda ordem, é possível utilizar a equação (9), em termos da velocidade do cubo, que de fato é de primeira ordem.

Mais do que isso, ela evidentemente é separável, já que pode ser reescrita como:

$$\frac{\mu b^2}{mh}dt + \frac{1}{v}dv = 0 \tag{13}$$

que é exatamente da forma de (11) com $P = \mu b^2/mh$ e $Q = 1/v$, de modo que basta integrarmos para obter sua solução. Assim:

$$\frac{\mu b^2}{mh}\int dt + \int \frac{dv}{v} = C_1 \Rightarrow \frac{\mu b^2}{mh}t + \ln v = C_1 \tag{14}$$

Para a determinação de C_1, podemos aplicar a condição inicial dada pelo enunciado, isto é, que no instante inicial ($t = 0$) o cubo possui uma velocidade $v = v_0$. Substituindo essas informações na equação (14)

$$\frac{\mu b^2}{mh} \cdot 0 + \ln v_0 = C_1 \Rightarrow C_1 = \ln v_0 \tag{15}$$

de modo que com isso, e definindo as constantes do problema como sendo $k \equiv \mu b^2/mh$, a expressão (14) se transforma em:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt \tag{16}$$

de onde, desenvolvendo o logaritmo, finalmente chega-se na seguinte expressão para a velocidade em função do tempo:

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \tag{17}$$

Para achar o espaço $x = x(t)$ basta, agora, integrar a expressão obtida para a velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \Rightarrow \int dx = \int v_0 e^{-kt}dt \Rightarrow x = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + C_2 \tag{18}$$

sendo a constante C_2 determinada pela condição inicial $x(0) = 0$, que fornece $C_2 = v_0/k$, o que resulta na seguinte expressão do deslocamento do cubo em função do tempo:

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \tag{19}$$

Isso significa que a **resposta do item 1** é dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad \text{sendo} \quad k = \frac{\mu b^2}{mh}$$

3.3 Solução dos demais itens

Os itens 2 e 3 são aplicações diretas das expressões (17) e (19). Utilizando os valores fornecidos no enunciado, é possível descobrir o valor de k

$$k = \frac{\mu b^2}{mh} = \frac{0,1 \cdot 0,05^2}{1 \cdot 0,0001} = 2.5 \tag{20}$$

o que junto com a informação de que $v_0 = 20$ m/s permite calcular, através da equação (17), o tempo pedido no item 2, isto é, t para o qual $v(t) = 0{,}1$ m/s:

$$0,1 = 20e^{-2,5t} \Rightarrow 2,5t = \ln(200) \Rightarrow t \approx 2,12 \text{ s} \tag{21}$$

Com a resposta do item 2, é possível agora responder o item 3, que pede a posição do bloco no instante em que a velocidade é $v(t) = 0{,}1$ m/s. Para isso, basta substituir o tempo encontrado em (21) na equação (19):

$$x(2,12) = \frac{20}{2,5}\left(1 - e^{-2,5 \cdot 2,12}\right) \Rightarrow x \approx 7,96 \text{ m} \tag{22}$$

4 Comentários finais

Em primeiro lugar, é importante ressaltar que a questão é, conceitualmente, muito pertinente. Sobretudo se considerada a exigência teórica durante o equacionamento, isto é, o fato de ser preciso transportar uma situação real para um modelo, usando leis físicas e hipóteses simplificadoras que são ensinadas durante as aulas da disciplina.

Apesar desse equacionamento possuir algumas sutilezas (e, consequentemente, poder ter gerado dificuldades e erros), novamente o maior problema provavelmente foi durante a solução das equações encontradas. Apesar de ser uma equação diferencial relativamente simples (separável), a falta de prática dos alunos com esse tipo de problema pode ter tornado sua resolução mais difícil. Outro aspecto que aumenta a dificuldade geral da questão é a dependência direta entre os itens: sem resolver corretamente o primeiro, não seria possível nenhum dos outros dois.