

# Estratégias restritas ótimas para investimentos baseados em fatores no mercado de ações brasileiro

Marcelo Lewin<sup>1</sup>

 <https://orcid.org/0000-0003-1699-8832>

E-mail: marcelo.lewin@coppead.ufrj.br

Carlos Heitor Campani<sup>2</sup>

 <https://orcid.org/0000-0003-1896-7837>

E-mail: chc@carlosheitorcampani.com

<sup>1</sup> Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPEAD Graduate School of Business, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>2</sup> Escola de Negócios e Seguros – ENS, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 28/11/2023 – Desk aceite em 12/12/2023 – 2ª versão aprovada em 22/04/2024

Editor-Chefe: Andson Braga de Aguiar

Editora Associada: Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi

## RESUMO

O artigo examina estratégias de investimento para carteiras baseadas em fatores formadas pela integração de um modelo de múltiplos regimes com uma função de utilidade recursiva estocástica. Com base nos trabalhos seminais de Fama e French (1993) e Carhart (1997), os autores identificam quatro fatores de risco no mercado acionário brasileiro. Posteriormente, empregando o modelo CGL proposto por Campani et al. (2021), o estudo desenvolve estratégias de investimento para diversificar os portfólios formados com esses fatores de risco. O modelo CGL fornece a estrutura para aplicar a função de utilidade recursiva estocástica para estimar as estratégias com base em regimes, a partir dos quais os autores implementam restrições dinâmicas para controlar de forma otimizada os pesos do portfólio. Em seguida, eles realizam uma análise de desempenho por meio de um exercício fora da amostra para comparar as estratégias de múltiplos regimes com *benchmarks* formados por estratégias passivas e ativas de estado único. Os resultados empíricos demonstram o desempenho superior das estratégias de múltiplos regimes, conforme evidenciado pelos índices de Sharpe superiores tanto na amostra completa quanto em subamostras mais curtas dentro do exercício. Os resultados também revelam que a estratégia de múltiplos regimes sem alavancagem apresenta consistentemente a menor volatilidade em cada subconjunto da amostra. Além disso, a análise dos retornos dos equivalentes de certeza confirma a significância estatística do desempenho superior das estratégias de múltiplos regimes em relação aos *benchmarks*. A investigação se concentrou no mercado de ações brasileiro para examinar os possíveis benefícios e a eficácia da aplicação dessa estratégia em um contexto de mercado emergente. Em última análise, as descobertas ressaltam que as estratégias baseadas em fatores formuladas por meio de um modelo de múltiplos regimes usando uma função de utilidade recursiva estocástica têm o potencial de superar os *benchmarks* tradicionais em termos de retornos ajustados ao risco no mercado acionário brasileiro, oferecendo *insights* práticos para os investidores que navegam no cenário brasileiro.

**Palavras-chave:** modelos de múltiplos regimes, fatores de risco, utilidade recursiva diferencial estocástica, alocação dinâmica de ativos, alavancagem e restrições de portfólio.

## Endereço para correspondência

Marcelo Lewin

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPEAD Graduate School of Business

Rua Pascoal Lemme, 355 – CEP: 21941-918

Cidade Universitária – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Este artigo foi escrito originalmente em inglês e publicado sob o DOI <https://doi.org/10.1590/1808-057x20242051.en>

Este artigo deriva da tese de doutorado apresentada pelo coautor, Marcelo Lewin, em 2023.



## Optimal constrained strategies for factor-based investing in the Brazilian stock market

### ABSTRACT

The paper examines investment strategies for factor-based portfolios formed by integrating a regime-switching model with a stochastic recursive utility function. Drawing from the seminal works of Fama and French (1993) and Carhart (1997), the authors identify four risk factors within the Brazilian stock market. Subsequently, employing the CGL model proposed by Campani et al. (2021), the study develops investment strategies to diversify across portfolios formed with these risk factors. The CGL model provides the framework to apply the stochastic recursive utility function to estimate the strategies based on regimes, from which the authors implement dynamic constraints to optimally control the portfolio weights. They then conduct a performance analysis through an out-of-sample exercise to compare the regime-switching strategies with benchmarks formed by single-state passive and active strategies. The empirical findings demonstrate the outperformance of regime-switching strategies, as evidenced by superior Sharpe ratios across both the complete sample and shorter subsamples within the exercise. The results also reveal that the unleveraged regime-switching strategy consistently exhibits the lowest volatility within each sample subset. In addition, the analysis of certainty equivalent returns confirms the statistical significance of the outperformance of regime-switching strategies over the benchmarks. The investigation focused on the Brazilian stock market to examine the potential benefits and efficacy of applying such a strategy in an emerging market context. Ultimately, the findings underscore that factor-based strategies formulated through a regime-switching model using a stochastic recursive utility function have the potential to outperform traditional benchmarks in terms of risk-adjusted returns within the Brazilian stock market, offering actionable insights for investors navigating the Brazilian landscape.

**Keywords:** regime-switching models, risk factors, stochastic differential recursive utility, dynamic asset allocation, leverage and portfolio constraints.

## 1. INTRODUÇÃO

Algumas questões críticas para os investidores estão relacionadas aos principais impulsionadores dos retornos das ações e como diversificar entre eles. Sharpe (1964) e Lintner (1965), por exemplo, abordaram a primeira questão introduzindo o modelo CAPM, no qual diferentes exposições ao risco de mercado (beta) descrevem variações nos retornos excedentes esperados das ações. Em seguida, Fama e French (1993) apresentaram um modelo de três fatores baseado no excesso de retorno da carteira de mercado, no retorno de uma carteira *long* (comprada) em ações de empresas com tamanho pequeno e *short* (vendida) em ações de empresas com tamanho grande (*small minus big*, SMB) e no retorno de uma carteira *long* em ações com alto índice *book-to-market* e *short* em ações com baixo índice *book-to-market* (*high minus low*, HML). Eles demonstram que a inclusão dessas duas carteiras, geralmente chamadas de fatores de tamanho e valor, como fatores de risco adicionais leva a uma melhor explicação do corte transversal dos retornos médios das ações. Posteriormente, Carhart (1997) ampliou o modelo de três fatores com um fator de momentum, uma carteira *long* em ações vencedoras e *short* em ações perdedoras (momentum, MOM).

Embora a literatura apresente fatores de risco adicionais para ações (Ang, 2014; Fama & French, 2015; Hou et al., 2015), definimos nosso escopo nos fatores clássicos de Fama-French-Carhart, ou seja, o modelo de quatro fatores.

Seguimos Chincoli e Guidolin (2017), que estudaram os quatro fatores como principais impulsionadores do mercado. Assim, vamos nos referir a SMB, HML e MOM como portfólios investíveis que imitam os fatores de tamanho, valor e momentum, como em Ferson et al. (2006).

Abordamos a segunda questão crítica relativa às estratégias de diversificação considerando que uma carteira formada por diferentes fatores permite que o investidor selecione entre diferentes tipos de risco. Por exemplo, se alguém espera que um fator tenha desempenho superior ao do mercado, pode aumentar sua exposição por meio de uma carteira em que o peso desse fator seja maior do que o do mercado. Essa é a transformação do investimento passivo baseado em fatores em uma estratégia ativa, diz Ang (2014).

A literatura oferece uma rica documentação sobre as deficiências do investimento passivo. Por exemplo, Haghani e Dewey (2016) destacam os perigos de manter uma carteira com pesos predeterminados pelos valores de mercado em face de bolhas e pânico no mercado. Além disso, Blitz (2020) documenta que o SMB e o HML tiveram, individualmente, um retorno médio negativo nas ações dos Estados Unidos da América (EUA) no período de 2010 a 2019, assim como os retornos do MOM diminuíram significativamente em comparação com o período mais longo de 1963 a 2019.

Por outro lado, encontramos apoio para estratégias ativas, primeiro, em Barroso e Santa-Clara (2015) e

Daniel e Moskowitz (2016), que argumentam que as estratégias que acompanham a volatilidade podem atenuar as quedas de momentum. Em seguida, Chincoli e Guidolin (2017) afirmam que os fatores podem ajudar a diversificar além da abordagem tradicional ponderada pelo valor, demonstrando a importância de estimar os momentos condicionais dos retornos dos fatores. Eles mostram que os modelos de múltiplos regimes fornecem estimativas superiores e estratégias de portfólio mais lucrativas do que outros modelos multivariados. Da mesma forma, Perez-Quiros e Timmermann (2000), Black e McMillan (2004), Guidolin e Timmermann (2008b), Tu (2010) e Gulen et al. (2011) mostram que os portfólios baseados em fatores construídos em modelos de múltiplos regimes superam os *benchmarks* de estado único. Entretanto, nenhuma dessas conclusões se baseia em funções de utilidade recursivas, que são consideradas mais realistas para fins de investimento. Por exemplo, Tu (2010) usa a função de utilidade quadrática, enquanto Chincoli e Guidolin (2017) trabalham com a função *power-utility*.

As funções de utilidade recursivas estão à frente dessas, pois presumem que a felicidade de amanhã depende da felicidade de hoje e não são aditivas no tempo. Além disso, elas permitem a configuração das preferências de investimento ao definir o horizonte de tempo para a resolução da incerteza, o que afeta o modelo de alocação ao separar a aversão ao risco relativo das decisões de consumo ao longo do tempo (elasticidade da substituição intertemporal). A função que captura essas preferências em tempo contínuo é a função de utilidade diferencial estocástica de Duffie e Epstein (1992).

A estratégia de alocação apresentada por Campani et al. (2021), ou seja, o modelo CGL, é até agora o único modelo que usa a função de utilidade recursiva diferencial estocástica em uma estrutura de mudança de regime que fornece uma solução de forma fechada para o problema de alocação. Trata-se de uma solução aproximada baseada em Campani e Garcia (2019). Os autores demonstram que ela é suficientemente precisa. Antes do modelo CGL, a literatura resolvia problemas de alocação dinâmica em regimes com funções *power-utility* usando métodos numéricos, como a simulação de Monte Carlo, como em Sass e Haussmann (2004), Guidolin e Timmermann (2007) e Liu (2011), ou sob condições muito específicas, como em Wachter (2002), que fornece fórmulas analíticas para resolver problemas da *power-utility*, mas limitadas a uma correlação negativa perfeita entre os retornos dos ativos e a variável preditora; e Honda (2003), que encontra uma solução de forma fechada para o problema do portfólio limitado ao caso de uma aversão relativa ao risco constante igual a 0,5.

Rouwenhorst (1999) apresenta evidências de que as ações dos mercados emergentes, assim como as dos mercados desenvolvidos, apresentam SMB, HML e MOM. Ele realiza um estudo internacional com 1.705 ações de 20 mercados emergentes de todos os continentes. Nas Américas, por exemplo, ele estuda empresas da Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, México e Venezuela. Sem propor uma estratégia de alocação, sua pesquisa mostra que os fatores que impulsionam as diferenças transversais nos retornos esperados das ações nos mercados acionários emergentes são qualitativamente semelhantes aos dos mercados desenvolvidos. Por sua vez, Chague e Bueno (2008) e Santos et al. (2012) revelam que os modelos de três e quatro fatores são válidos para ações brasileiras, respectivamente. Entretanto, ambos aplicaram estratégias passivas de alocação. Enquanto isso, Chen e Kawaguchi (2018) estudam um portfólio baseado em fatores em uma estrutura de regime, usando a utilidade quadrática para formar estratégias com ações chinesas. Seguindo a lacuna relacionada aos mercados desenvolvidos, até onde sabemos, não há aplicações de uma carteira baseada em fatores em mercados emergentes usando uma alocação ótima com utilidade recursiva configurada em regimes ocultos em um processo de Markov.

O modelo CGL nunca foi aplicado sob a perspectiva do investimento baseado em fatores, ou seja, investidores que formam suas carteiras usando carteiras ou índices de fatores de risco. Lewin e Campani (2020a) demonstram a precisão do modelo CGL com uma carteira de ações e títulos brasileiros e ações internacionais afetadas pela taxa de câmbio. Em um exercício fora da amostra, Lewin e Campani (2020b) mostram que o modelo CGL supera o desempenho de carteiras de referência de ações, diferentes classes de títulos e a taxa de câmbio. Enquanto isso, Lewin e Campani (2022) aplicam o modelo CGL no mercado de ações dos EUA usando diferentes níveis de custo de transação. Esses últimos autores também introduzem um controle de alavancagem para permitir estratégias restritas na estrutura do modelo CGL, o que afeta os portfólios baseados em regime e será abordado no presente estudo.

Investigamos o desempenho de uma estratégia baseada em fatores formulada com um modelo de múltiplos regimes usando essa função de última geração, a função de utilidade recursiva. Nossa escolha regional foi o Brasil devido à sua representatividade entre outros mercados acionários emergentes. Além disso, permitiu que nos concentrássemos em um único país, evitando o impacto direto das taxas de câmbio sobre a estimativa de regime.

Este estudo calcula as carteiras SMB, HML e MOM da bolsa de valores brasileira B3 e, em seguida, aplica o modelo CGL restrito para estimar as estratégias com base

em regimes para o investidor baseado em fatores. Por fim, em um exercício fora da amostra com custos de transação, comparamos o desempenho do CGL com estratégias ativas e passivas interpretadas como *benchmarks*. Os resultados

indicam que o índice de Sharpe do modelo CGL supera os *benchmarks*, e os retornos dos equivalentes de certeza mostram que esse desempenho superior é estatisticamente significativo.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 Economia com Mudanças de Regime

Consideramos um investidor em um modelo de tempo contínuo com uma economia com mudanças de regime que governa os retornos dos ativos. O investidor maximiza sua função de utilidade recursiva diferencial estocástica com uma estratégia ótima de alocação de portfólio.

#### 2.1.1 Variável de estado

Segundo Hamilton (1989), consideramos uma economia governada pela variável de estado não observável  $Y_t$  que descreve um processo de cadeia de Markov independente, dado  $R = \{1, 2, \dots, m\}$ , em que  $R$  é um conjunto finito de  $m$  regimes possíveis. Em seguida, tratamos o comportamento da variável de estado por meio de probabilidades de transição, que determinarão

$$\begin{bmatrix} d\hat{r}_{1,t} \\ d\hat{r}_{2,t} \\ \dots \\ d\hat{r}_{n,t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_{s,t} dt + \boldsymbol{\sigma}_{s,t} d\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \\ \dots \\ \mu_{n,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1,t} & \sigma_{n2,t} & \dots & \sigma_{nn,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_{1,t} \\ dZ_{2,t} \\ \dots \\ dZ_{n,t} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que  $\boldsymbol{\mu}_{s,t}$  é um vetor  $n \times 1$  dos prêmios de risco instantâneos esperados (desvios),  $\boldsymbol{\sigma}_{s,t}$  é uma matriz  $n \times n$  de volatilidade triangular inferior e  $d\mathbf{Z}_t$  é um vetor coluna com  $n$  incrementos de processos Wiener padrão independentes. Dado que tanto  $\boldsymbol{\mu}_{s,t}$  quanto  $\boldsymbol{\sigma}_{s,t}$  variam no tempo e são condicionados pela variável de estado  $Y_t$ , se considerarmos  $Y_t = i$ ,  $i \in R$ , obteremos:

$$\boldsymbol{\mu}_{s,t} = \boldsymbol{\mu}_{s,i} = \begin{bmatrix} \mu_{1,i} \\ \mu_{2,i} \\ \dots \\ \mu_{n,i} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\sigma}_{s,t} = \boldsymbol{\sigma}_{s,i} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,i} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{21,i} & \sigma_{22,i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1,i} & \sigma_{n2,i} & \dots & \sigma_{nn,i} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

em que os coeficientes  $\mu_{j,i}$  e as matrizes  $\boldsymbol{\sigma}_{s,i}$  são constantes para cada  $j = \{1, 2, \dots, n\}$ . Ressaltamos que os elementos de  $\boldsymbol{\sigma}_{s,i}$  são definidos como volatilidades parciais, por exemplo,  $\sigma_{21,i}$  denota a volatilidade parcial do ativo 2 em relação ao primeiro processo de Wiener ( $dZ_{1,t}$ ) no regime  $i$ , e também que  $\boldsymbol{\sigma}_{s,i} \boldsymbol{\sigma}_{s,i}^T$  representa a matriz de variância-covariância dependente do regime. Como os desvios são dependentes do regime e simultaneamente dependentes do tempo, isso significa que eles podem variar no tempo mesmo que o regime permaneça inalterado. Esses desvios são armazenados em uma matriz de desvios  $n \times m$ :

$$\mathbf{D}_{s,t} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \dots & \mu_{1,m} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \dots & \mu_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \dots & \mu_{n,m} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

se a economia permanecerá no mesmo regime ou se passará para um novo regime após um período de tempo distribuído exponencialmente, como segue:

$$P_{ij,\Delta t} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{k \neq i} \lambda_{ik}} (1 - e^{-\sum_{k \neq i} \lambda_{ik} \Delta t}), \quad (1)$$

com  $j \neq i \in R$  e  $\lambda_{ij} > 0$ ,

em que  $\lambda_{ii} = -\sum_{k \neq i} \lambda_{ik} \leq 0$  de modo que  $P_{ij,\Delta t} = \frac{\lambda_{ij}}{-\lambda_{ii}} (1 - e^{\lambda_{ii} \Delta t})$ . A probabilidade de permanecer no mesmo regime  $i$  no próximo  $\Delta t$  é dada por  $P_{ii,\Delta t} = e^{\lambda_{ii} \Delta t}$ , onde se presume que  $\lambda_{ij}$  seja constante.

#### 2.1.2 Dinâmica de ativos

Os fatores de risco são representados por  $n$  ativos de risco, e os retornos excedentes ( $\hat{r}$ ) sobre o ativo sem risco ( $rf$ ) são definidos por meio do processo estocástico multidimensional:

Com esses ativos e processos de variáveis de estado, obtemos os parâmetros do regime por meio da metodologia de estimativa de máxima verossimilhança (ML, de *maximum likelihood* em inglês), que são: a matriz de desvios  $\mathbf{D}_{s,t}$ , a matriz de volatilidade  $\boldsymbol{\sigma}_{s,i}$  e as probabilidades de transição  $P_{ij,\Delta t}$  (onde  $j \neq i \in R$ ). O número de parâmetros a serem estimados é  $[mn + mn(n + 1) \div 2 + m(m - 1)]$ . Dada a natureza não observável dos regimes, seguindo Hamilton (1989), presumimos que os investidores podem inferir a ocorrência dos regimes por meio de probabilidades filtradas observando os retornos passados dos ativos.



## 2.2 Estratégia de Portfólio

Considerando  $W_t$  como o patrimônio em  $t$  e  $\alpha_t$  como o vetor  $1 \times n$  das participações no portfólio dos ativos de risco, e  $(1 - \alpha_t \mathbf{1})$  como a participação no ativo sem risco, a dinâmica do patrimônio pode ser expressa como:

$$dW_t = (1 - \alpha_t \mathbf{1})W_t r_f dt + W_t \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} = W_t r_f dt + W_t \alpha_t [D_{s,t} \pi_t dt + (V \pi_t) dZ_t], \quad 5$$

em que  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna de  $n$  unidades,  $\frac{dS_t}{S_t}$  é um vetor coluna com  $n$  retornos de ativos infinitesimalmente arriscados,  $\pi_t$  é um vetor coluna das  $m$  probabilidades filtradas em  $t$  e  $V$  é um vetor linha  $1 \times m$  que contém as matrizes de covariância dependentes do regime  $(\sigma_{s,i})$ .

### 2.2.1 Função de utilidade

No modelo CGL, as preferências do investidor são caracterizadas como de tempo contínuo e modeladas pela função de utilidade estocástica de Duffie e Epstein (1992):

$$J_t = E_t \left[ \int_{u=t}^T f(C_u, J_u) du + \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right], \quad 6$$

em que  $E_t$  é o valor esperado no momento atual ( $t$ );  $T$  é o horizonte de investimento;  $f$  é o agregador recursivo da função de utilidade  $J_t$  como uma função da taxa de consumo  $C_u$  (no momento  $u$ ) e  $J_u$ , a utilidade contínua em  $u$ . Por sua vez,  $W_T$  é a riqueza terminal do investidor, enquanto  $\gamma$  é o coeficiente de aversão ao risco. A função a seguir detalha o agregador da função de utilidade:

$$f(C, J) = \frac{\beta}{1-\frac{1}{\psi}} (1-\gamma) J \left\{ \left[ \frac{c}{[(1-\gamma)J]^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right]^{1-\frac{1}{\psi}} - 1 \right\}, \quad 7$$

em que  $\beta$  é a taxa de preferência temporal da utilidade do investidor (felicidade) e  $\psi$  é a elasticidade da substituição intertemporal, ou seja, as escolhas de consumo ao longo do tempo. Portanto, devemos definir  $\psi$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  para configurar a estratégia usando a utilidade recursiva.

$$H(\pi_t, \tau) = \exp[A_0(\tau) + \sum_{i=1}^m A_i(\tau) \pi_{i,t} + \sum_{i=1}^m B_i(\tau) \pi_{i,t}^2 + \sum_{j<i} C_{ij}(\tau) \pi_{i,t} \pi_{j,t}], \quad 9$$

em que  $\pi_{i,t}$  é a probabilidade do regime  $i$  no momento  $t$ . Enquanto isso,  $A_0$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_{ij}$  são coeficientes de horizonte temporal obtidos da solução da equação de Bellman em um sistema de equações diferenciais parciais (EDP). Campani et al. (2021) demonstram o EDP e fornecem os detalhes para resolver a equação de Bellman.

$$\alpha_t = \frac{1}{\gamma} (D_{s,t} \pi_t)^T [(V \pi_t)(V \pi_t)^T]^{-1} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^m [A_i(\tau) + 2B_i(\tau) \pi_{i,t} + \sum_{j \neq i} C_{ij}(\tau) \pi_{j,t}] \sigma_{i,\pi} (V \pi_t)^{-1}, \quad 10$$

em que  $\alpha_t = [\alpha_{1,t} \dots \alpha_{n,t}]$ ,  $\sigma_{i,\pi} = [\sigma_{i1,\pi} \sigma_{i2,\pi} \dots \sigma_{in,\pi}]$ ,  $i \in R$  e  $j = \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.2.3 Controle de alavancagem máxima (MaxLev)

A Equação 10 indica os pesos ótimos, mas devemos controlá-los dentro da alavancagem máxima permitida pelo investidor. Por isso, aplicamos o MaxLev de Lewin e

Campani e Garcia (2019) analisam a sensibilidade das escolhas de consumo e portfólio em um modelo de estado único. Eles constatam que  $\psi$  afeta as preferências de consumo, mas quase não afeta a estratégia de alocação. Campani et al. (2021) encontraram um resultado semelhante para um modelo de múltiplos regimes. Portanto, podemos estudar a estratégia de alocação e desconsiderar o consumo intermediário definindo  $\psi = \infty$ . Isso representa o investidor aguardando o horizonte final para consumir o patrimônio. Em um problema sem consumo intermediário, o valor de  $\beta$  não afetará significativamente a estratégia de alocação. Campani et al. (2021) e Guidolin e Timmermann (2007) também mostram que o horizonte de investimento tem um impacto insignificante sobre a estratégia quando se considera o rebalanceamento frequente. E, como ambos, consideramos  $\gamma = 5$ .

Campani et al. (2021) mostram que a solução geral que quantifica a utilidade ótima total do investidor em  $t$  ( $V_t = \sup J_t$ ) admite a solução separável por riqueza:

$$V(W_t, \pi_t, \tau) = H(\pi_t, \tau) \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad 8$$

em que  $\tau = T - t$  é o tempo até o horizonte final e  $H(\pi_t, \tau)$  é uma função em termos do tempo até o horizonte e o vetor de probabilidade do regime. No entanto, como uma expressão analítica exata para  $H(\pi_t, \tau)$  ainda não está disponível na literatura, Campani et al. (2021), com base na equação de Bellman, resolvem o problema com a seguinte expressão analítica aproximada:

### 2.2.2 Pesos do portfólio

Dada a solução aproximada para  $V(W_t, \pi_t, \tau)$  e os coeficientes  $A_0$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_{ij}$  da função  $H(\pi_t, \tau)$ , o modelo CGL apresenta os pesos ótimos para a alocação sob múltiplos regimes usando a função de utilidade recursiva dada pela seguinte forma:

Campani (2022) para restringir a alavancagem no modelo CGL. Primeiro, coletamos os pesos sem restrições com 100% de probabilidade para cada regime por meio da equação (10) com  $\hat{\pi}_t = i$ -ésima coluna de uma matriz de identidade de ordem  $m$ . Em seguida, usando um vetor  $1 \times m$ , armazenamos as alavancagens não restritas condicionadas por cada regime (**UncLev**), cujos elementos são:

$$UncLev_i = \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \max(\hat{\alpha}_{\hat{\pi}_i, k}, 0) \right] - 1, \text{ com } i \in R = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (11)$$

em que  $\hat{\alpha}_{\hat{\pi}_i, k}$  é o  $k$ -ésimo elemento do vetor linha  $\hat{\alpha}_{\hat{\pi}_i} = [\alpha_{\hat{\pi}_i} (1 - \alpha_{\hat{\pi}_i} \mathbf{1})]$  formado pelo vetor de pesos dos ativos de risco e pelo peso do ativo sem risco, todos condicionados por  $\hat{\pi}_i$ . Definimos os valores de alavancagem máxima condicionados pelo regime ( $L_{b,i}$ ) construindo uma matriz  $z \times m$ , em que  $z$  é um número inteiro positivo que representa o número de políticas investigadas na pesquisa e  $b = \{1, 2, \dots, z\}$ :

$$MaxLev = \begin{bmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{z1} & \dots & L_{zm} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Em seguida, calculamos os ajustes necessários para que  $\gamma$  confine  $UncLev_i$  dentro dos limites dados em  $MaxLev$ , com os quais derivamos o parâmetro de risco

$$\alpha_{b,t} = \frac{1}{(\gamma_b \pi_t)} (D_{s,t} \pi_t)^T [(V \pi_t)(V \pi_t)^T]^{-1} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^m [A_i(\tau) + 2B_i(\tau) \pi_{i,t} + \sum_{j \neq i} C_{ij}(\tau) \pi_{j,t}] \sigma_{i,\pi} (V \pi_t)^{-1}. \quad (14)$$

## 2.3 Modelo de Quatro Fatores

### 2.3.1 Conjunto de dados

Calculamos os fatores de risco usando as ações listadas no IBrX 100, o índice das 100 ações brasileiras mais líquidas. A bolsa B3 reequilibra a composição do índice na primeira segunda-feira de janeiro, maio e setembro. Esse banco de dados começa em 1996. Excluímos as três composições do ano inicial devido ao maior número de ações não elegíveis em comparação com as de 1997 em diante, de acordo com os critérios de seleção especificados abaixo. Extraímos os preços diários de 1997 a 2022 da Economática (convertemos a série em dados semanais para aplicar o modelo de múltiplos regimes).

Com base nas datas de rebalanceamento, atualizamos o universo de ações três vezes por ano para acompanhar as novas composições do índice. Além disso, controlamos o viés de sobrevivência considerando o conjunto completo de ações listadas na composição do índice em um determinado momento. Assim, quando necessário, calculamos as carteiras incluindo ações que foram posteriormente retiradas da lista. O uso do índice impôs naturalmente um filtro de liquidez na seleção de ações. Além disso, primeiro, mantivemos apenas uma ação por empresa (a mais negociada). Em segundo lugar, filtramos as *penny stocks*, as ações com valor contábil negativo (para eliminar aquelas com alto risco de inadimplência) e as ações sem negociações em mais de 20% das observações diárias no ano anterior ao relatório de composição (para atenuar possíveis distorções no cálculo do MOM).

( $\gamma = 5$ ) condicional aos limites e regimes. O procedimento resulta em uma nova matriz  $z \times m$  cujos elementos são:

$$\gamma_{b,i} = \gamma \times \max \left[ (1 + UncLev_i) \div (1 + L_{b,i}), 1 \right], \quad (13)$$

em que o operador máximo preserva  $\gamma = 5$  quando o elemento  $UncLev_i$  já está abaixo do limite imposto por  $L_{b,i}$ . Multiplicando a nova matriz  $b$ -ésima linha (expressa por  $\gamma_b = [\gamma_{b,1} \dots \gamma_{b,m}]$ ) pelo vetor coluna de probabilidades de regime no tempo  $t$  ( $\pi_t$ ), obtemos um valor dinâmico como nosso parâmetro de risco, que é uma média de  $\gamma_b$  (dinamicamente) ponderada por  $\pi_t$ . Inserindo isso na equação (10), encontramos os pesos restritos pela política  $b$  no tempo  $t$ :

### 2.3.2 Construção

Seguindo Fama e French (1993) e Cahart (1997), o modelo de quatro fatores se baseia na classificação multivariada para construir carteiras ponderadas por valor com base no tamanho (capitalização de mercado), *book-to-market* (BM) e retornos anteriores (2-12) (já que o primeiro fator é a carteira de mercado). Seguimos Fama (2017) para definir a configuração anterior (2-12). Isso significa, por exemplo, que em janeiro de 2001, as ações foram classificadas de acordo com os retornos totais dos 2 a 12 meses anteriores com base em seus retornos continuamente compostos de janeiro de 2000 a novembro de 2000.

Os autores citados criam seis carteiras bivariadas. Eles separam as ações em duas carteiras classificadas por tamanho, usando a mediana para separar ações de empresas com tamanho grande e pequeno. Ao mesmo tempo, eles separam as ações em três carteiras classificadas pelo BM, usando os percentis 30 e 70 para separar as ações altas (valor), neutras e baixas (crescimento). Aplicando o mesmo procedimento usando retornos anteriores em vez de BM, eles também obtêm ações altas (vencedoras), neutras e baixas (perdedoras). Ao combinar a classificação por tamanho com a classificação por BM, eles obtêm seis portfólios bivariados. Da mesma forma, ao combinar as classificações por tamanho e retornos anteriores, eles obtêm outros seis portfólios.

Embora também tenhamos criado portfólios bivariados, criamos nove portfólios em vez de seis. Primeiro, separamos as ações em três carteiras classificadas por tamanho, usando os percentis 40 e 60 para separá-las em ações com empresas de tamanho grande, neutro

(médio) e pequeno; adotamos esse mesmo procedimento para classificar as ações por BM e retornos anteriores. A configuração com esses percentis significa que reduzimos as carteiras neutras (univariadas) em relação a Fama e French (1993); o motivo é que temos muito menos ações no Brasil, portanto, queremos omitir menos ações (como explicaremos mais adiante, as carteiras neutras são desconsideradas). Em seguida, combinando a classificação por tamanho com a classificação por BM, obtemos nove carteiras bivariadas. Em seguida, obtemos outro conjunto de nove portfólios repetindo o procedimento usando retornos anteriores em vez de BM. Observe que cinco de cada conjunto de nove portfólios são de tipos bivariados, em que “neutra” é pelo menos uma das combinações possíveis.

Das nove combinações possíveis formadas entre tamanho e BM (ou entre tamanho e retornos anteriores), descartamos as cinco carteiras formadas com “neutra” para atenuar a correlação entre os fatores. Por fim, repetimos a classificação dos portfólios semanalmente para corresponder à frequência de dados usada pelo modelo CGL.

### 2.3.3 SMB (*small minus big*)

Conforme indicado, ao classificar tamanho e BM, depois de descartar os cinco portfólios formados com “neutra”, obtivemos quatro portfólios: Pequenas\_Valor, Pequenas\_Crescimento, Grandes\_Valor e Grandes\_Crescimento. Em seguida, usando os retornos diários dessas carteiras, obtemos o SMB como:

$$SMB = \frac{(Pequenas\_Valor + Pequenas\_Crescimento)}{2} - \frac{(Grandes\_Valor + Grande\_Crescimento)}{2}. \quad [15]$$

### 2.3.4 HML (*high minus low*)

As carteiras mencionadas acima, seguindo Fama (2017), fornecem o HML como:

$$HML = \frac{(Pequenas\_Valor + Grandes\_Valor)}{2} - \frac{(Pequenas\_Crescimento + Grandes\_Crescimento)}{2}. \quad [16]$$

### 2.3.5 MOM (*momentum*)

As nove carteiras bivariadas formadas por tamanho e retornos anteriores (2-12) dão origem ao MOM, onde, de forma análoga aos fatores anteriores, descartamos as cinco carteiras formadas pelas combinações com “neutra”. Também seguindo Fama (2017), o MOM é definido da seguinte forma:

$$MOM = \frac{(Pequenas\_Vencedoras + Grandes\_Vencedoras)}{2} - \frac{(Pequenas\_Perdedoras + Grandes\_Perdedoras)}{2}, \quad [17]$$

em que Pequenas\_Vencedoras, Grandes\_Vencedoras, Pequenas\_Perdedoras e Grandes\_Perdedoras são as séries de retornos diários gerados pelos portfólios bivariados classificados por tamanho e retornos anteriores (2-12).

### 2.3.6 Fator de mercado (*Mkt- $rf$* )

Os retornos em excesso do índice IBrX 100 sobre os retornos do ativo livre de risco representam o fator de mercado. Seguindo Lewin e Campani (2020a), consideramos o retorno do CDI brasileiro como o ativo livre de risco ( $rf$ ).

## 2.4 Aplicação do Modelo CGL

Aplicamos o modelo CGL para alocar  $n = 4$  ativos de risco ( $Mkt- $rf$ , SMB, HML e MOM$ ) juntamente com o ativo livre de risco (CDI).

### 2.4.1 Exercício fora da amostra

Construímos um exercício de 20 anos organizado em 60 janelas de observação. Todas elas começaram em 8 de janeiro de 1997, mas o número de observações foi aumentado em etapas de quatro meses; esse

procedimento garante que estimemos o modelo com base na amostra mais rica possível. (Re)estimamos o modelo a cada quatro meses, no final de cada janela (uma frequência maior não alterou significativamente as estimativas). A primeira janela, que termina em 30 de dezembro de 2002, tem 313 observações; a última, que termina em 31 de agosto de 2022, tem 1.339 observações. Portanto, os parâmetros de regime foram (re)estimados por meio da máxima verossimilhança com as observações de cada janela e mantidos nos quatro meses seguintes. A cada nova semana, definimos a estratégia a partir das probabilidades filtradas estimadas em  $t$  para  $t + 1$ . Em seguida, replicando apenas as informações disponíveis no momento da decisão de investimento, observamos os retornos fora da amostra. Esse exercício se estende de 8 de janeiro de 2003 a 19 de dezembro de 2022, abrangendo 1.356 observações semanais.

**Tabela 1**  
Critérios de informação

Janela	m	AIC	BIC	H-Q
<i>Mais antiga</i>				
	2	-5,039	-5,024	-5,075
	3	-5,067	-5,043	-5,124
	4	-5,085	-5,051	-5,167
<i>Intermediária</i>				
	2	-14,854	-14,826	-14,886
	3	-14,923	-14,878	-14,974
	4	-15,033	-14,970	-15,106
<i>Mais recente</i>				
	2	-24,435	-24,401	-24,465
	3	-24,616	-24,562	-24,665
	4	-24,809	-24,732	-24,877

**Notas:** A tabela apresenta os critérios de informação para os modelos com  $n = 4$  ativos de risco em 2, 3 e 4 regimes. Suas colunas mostram Akaike (AIC), Bayes-Schwartz (BIC) e Hannan-Quinn (H-Q) para três janelas do exercício fora da amostra. A janela mais antiga foi estimada de 08/01/1997 a 30/12/2002, a janela intermediária de 08/01/1997 a 26/12/2012 e a janela mais recente de 08/01/1997 a 19/12/2022. O exercício completo fora da amostra foi realizado com 60 janelas.

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

#### 2.4.2 Número de regimes

Para definir o número de regimes ( $m$ ), consideramos  $m = 1$  como o modelo de regime único apresentado na seção Resultados e que  $m = 4$  é o maior número de estados frequentemente observado na literatura. Além disso, Guidolin e Ono (2006) indicam uma relação de saturação entre o número de parâmetros estimados e o comprimento da série, com valores acima de 17. Em nossa aplicação, esse valor é  $m \leq 4$ . Assim, testamos modelos com  $m = 2, 3, 4$ . A Tabela 1 mostra seus critérios de informação (CI), apresentando três das 60 (re)estimativas obtidas usando as janelas 1, 30 e 60. O CI é relativamente estável durante as (re)estimativas e, conforme indica a Tabela 1,  $m = 4$  domina os outros modelos. Portanto, aplicamos um modelo com quatro regimes.

#### 2.4.3 Custos de transação

Supomos que o investidor rebalanceia a carteira a cada (fim de) semana e incorre em custos de transação. Seguimos Gârleanu e Pedersen (2013) e Nystrup et al. (2019), que definem os custos de transação em 10 pontos-base (0,10%) para estratégias dinâmicas de alocação de ativos. Esses últimos autores também propõem a inclusão de custos de retenção, cobrados à taxa livre de risco sobre as vendas a descoberto. Em nossa aplicação, os custos de retenção são naturalmente considerados, uma vez que o investidor toma emprestado à taxa livre de risco para a venda a descoberto.

#### 2.5 Alavancagem do Portfólio

Aplicamos o procedimento MaxLev de Lewin e Campani (2022) para restringir a solução CGL ótima, apresentar as carteiras de acordo com os níveis de alavancagem e observar diferentes perfis de investimento. A estratégia sem alavancagem é CGL MaxLev 0%, e as alavancadas são CGL MaxLev 50%, 100%, 150%, 200% e 250%. A Seção 4.3 mostra os resultados do CGL obtidos com o uso dessas configurações e identifica as que mais se aproximam da alavancagem dos *benchmarks* para que as comparações do exercício sejam feitas adequadamente.

No entanto, as equações 15 a 17 mostram que os fatores têm alavancagem intrínseca à medida que compram (*long*) e vendem (*short*) suas carteiras subjacentes, gerando os prêmios de risco sobre o ativo livre de risco (CDI). A equação 10 apresenta o vetor de pesos ótimos de ativos de risco que cria a estratégia baseada em fatores. É também o vetor dos pesos ótimos para cada fator, que não somam 100%, pois não tem peso livre de risco ( $1 - \alpha_1$ ). Para calcular os pesos dinamicamente restritos (equação 14), presumimos que os pesos somam 100%, considerando que um investimento de US\$ 100 em SMB, por exemplo, é investir US\$ 100 no ativo livre de risco, comprar (*long*) US\$ 100 de ações de empresas com tamanho pequeno e vender (*short*) US\$ 100 na carteira de ações de empresas com tamanho grande.

Portanto, uma estratégia não alavancada, ou seja, CGL MaxLev 0%, indica que não sugerimos nenhuma



alavancagem extra além da alavancagem intrínseca dos fatores (100%). Por sua vez, se o modelo CGL recomendar 50% de alavancagem, o investidor estará 150% alavancado, dada a alavancagem intrínseca dos fatores.

## 2.6 Benchmarks

Presumimos que o investidor esteja disposto a diversificar entre os fatores de risco brasileiros. Assim, comparamos as estratégias do modelo CGL com quatro estratégias ativas e passivas. Os *benchmarks* também diferenciam entre estratégias não alavancadas e alavancadas, pois apresentaremos o portfólio CGL variando a configuração da alavancagem.

### 2.6.1 Portfólio com ponderação igual (1/n)

DeMiguel et al. (2009) demonstram que um portfólio 1/n supera vários modelos dinâmicos baseados em regras ótimas, apesar de ser uma estratégia ingênua. Assim, ela representa um *benchmark* para estratégias passivas (e não alavancadas).

### 2.6.2 Portfólio tangente (Tangência)

O portfólio tangente é baseado nas preferências de utilidade quadrática usadas para construir a fronteira eficiente. O ponto em que a linha inclinada para cima é tangente à fronteira dos ativos de risco corresponde a esse portfólio, um portfólio somente de ativos de risco.

$$CER_i(\gamma, t) \equiv \frac{F}{T} \left\{ \frac{1}{W_t} \left[ \frac{1}{K-T} \sum_{\tau=1}^{K-T} \left[ W_{\tau+T}(\hat{\omega}_{i,t}(\gamma, T)) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \right] - 1 \right\}, \quad \boxed{18}$$

em que  $F$  é a frequência dos dados (52 semanas por ano),  $T$  é o horizonte (520 semanas),  $K$  é o número de retornos fora da amostra,  $\hat{\omega}_{i,t}$  são as proporções do patrimônio investido no ativo  $i$  e  $W_t$  é o patrimônio inicial (definido como 1). A seção a seguir apresenta as diferenças de

Nós a apresentamos como *benchmark* para a estratégia ativa não alavancada, ou seja, CGL MaxLev 0%, pois ela maximiza o índice de Sharpe (sobre as carteiras de risco na fronteira eficiente).

### 2.6.3 Modelo de regime único (RU)

O modelo RU corresponde às preferências de utilidade recursiva de um investidor que não considera uma economia com vários regimes. Nós o usamos para avaliar o impacto da mudança de regime no desempenho geral. Como a estratégia RU depende de alavancagem, ela é um *benchmark* para as estratégias ativas alavancadas, ou seja, CGL MaxLev 50% a 200%.

### 2.6.4 Modelo de regime único restrito (RU Rest)

Restringimos a última estratégia recalculando os pesos ótimos proporcionalmente a um portfólio não alavancado. Assim, o RU Rest se torna um *benchmark* para estratégias ativas não alavancadas em relação às quais avaliamos o impacto da mudança de regime no CGL MaxLev 0%.

## 2.7 Verificação da Robustez

Seguindo Fugazza et al. (2015) e Campani et al. (2021), usamos os retornos dos equivalentes de certeza (*CER*) anualizados para comparar e classificar diferentes estratégias. Os autores fornecem a derivação da seguinte expressão, que é usada para calcular o *CER*:

*CER* para comparar dois portfólios. Ela também relata os intervalos de confiança *bootstrap* de 95% extraídos de 1.000.000 de amostras com substituição, usando o método de percentil acelerado e com correção de viés devido a não normalidades nos retornos fora da amostra.

## 3. RESULTADOS

### 3.1 O Modelo de Quatro Fatores

Na Tabela 2, o painel A apresenta a média de longo prazo, a volatilidade e a correlação dos fatores como parâmetros de estado único. Ela mostra que os retornos excedentes esperados de MOM são positivos no período de 2003 a 2022, enquanto os de SMB e HML não estão longe de zero, indicando que as ações de empresas com tamanho grande e de crescimento (baixo BM) não superaram as vendas a descoberto de seus pares, como fizeram as vencedoras. Como em Fama e French (1993), esperávamos ver uma correlação negativa entre SMB

e HML, já que são derivados de carteiras de tamanho e BM. Como o BM é uma relação entre o patrimônio líquido contábil e o patrimônio líquido de mercado (tamanho), e o tamanho é atualizado diariamente (como resultado do preço), mas o patrimônio líquido contábil muda em uma frequência menor, no longo prazo, o HML geralmente tem um numerador constante e um denominador que varia com o tamanho. Assim, as correlações de HML e SMB com *Mkt- $r_f$*  também apresentam sinais invertidos. Na próxima seção, lendo os parâmetros de regime, derivamos a intuição por trás disso.

**Tabela 2**

Parâmetros estimados

<b>Painel A: Modelo de regime único</b>		<b>Mkt-<i>rf</i></b>	<b>SMB</b>	<b>HML</b>	<b>MOM</b>
<i>Retornos esperados</i>					
		4,2%	-0,4%	0,0%	9,3%
<i>Volatilidade e matriz de correlação</i>					
	Mkt- <i>rf</i>	27,9%			
	SMB	-0,30	20,2%		
	HML	0,30	-0,42	18,0%	
	MOM	-0,18	-0,01	-0,32	19,0%
<b>Painel B1: Modelo de quatro regimes</b>		<b>Mkt-<i>rf</i></b>	<b>SMB</b>	<b>HML</b>	<b>MOM</b>
<i>Retornos esperados</i>					
	Regime 1 (colapso)	-64,8%	-41,8%	-43,7%	61,3%
	Regime 2 (mercado em baixa)	-6,7%	5,3%	14,6%	-4,3%
	Regime 3 (mercado em alta)	2,9%	-4,6%	-3,0%	9,6%
	Regime 4 (recuperação)	23,2%	3,8%	-2,1%	14,6%
<i>Volatilidade e matriz de correlação</i>					
	Regime 1 (colapso)	Mkt- <i>rf</i>	86,6%		
		SMB	-0,59	63,9%	
		HML	0,57	-0,82	37,4%
		MOM	-0,15	0,39	-0,49
	Regime 2 (mercado em baixa)	Mkt- <i>rf</i>	29,5%		
		SMB	-0,12	22,4%	
		HML	0,03	-0,41	21,4%
		MOM	-0,09	-0,32	0,01
	Regime 3 (mercado em alta)	Mkt- <i>rf</i>	21,2%		
		SMB	-0,12	14,7%	
		HML	0,68	-0,09	18,1%
		MOM	-0,66	0,12	-0,75
	Regime 4 (recuperação)	Mkt- <i>rf</i>	17,6%		
		SMB	-0,29	11,9%	
		HML	0,16	-0,35	12,0%
		MOM	0,12	0,09	-0,29
<b>Painel B2: Modelo de quatro regimes</b>		<b>Regime 1</b>	<b>Regime 2</b>	<b>Regime 3</b>	<b>Regime 4</b>
<i>Probabilidades de transição</i>					
	Regime 1 (colapso)	86,9%	12,9%	0,1%	0,1%
	Regime 2 (mercado em baixa)	1,6%	87,3%	1,1%	10,0%
	Regime 3 (mercado em alta)	0,0%	0,0%	96,7%	3,3%
	Regime 4 (recuperação)	0,0%	7,0%	1,0%	92,0%
<i>Probabilidades ergódicas</i>					
		3,6%	28,7%	22,8%	45,0%
<i>Duração (semanas)</i>					
		8	8	30	12

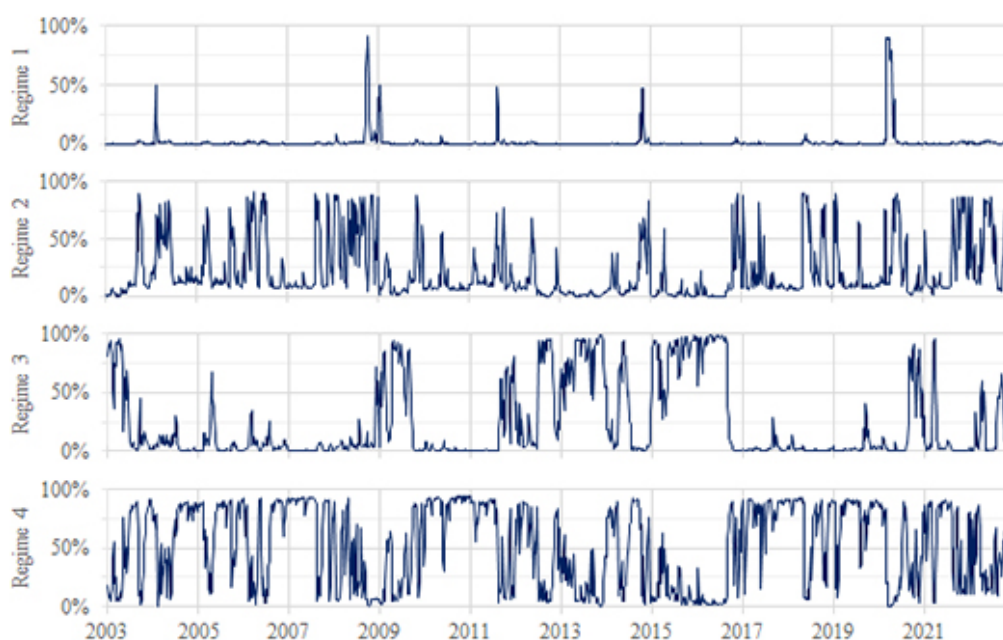
**Notas:** A tabela foi calculada usando o excesso de retornos sobre a taxa livre de risco. As matrizes de correlação mostram as volatilidades em suas diagonais. Os retornos e as volatilidades semanais são anualizados para apresentação. Os parâmetros foram estimados usando o conjunto completo de dados. Os retornos de mercado e *rf* são os retornos do IBR<sub>X</sub> 100 e da taxa CDI, respectivamente. SMB, HML e MOM são small minus big, high minus low e momentum, respectivamente.

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

### 3.2 O Modelo de Quatro Regimes

Na Tabela 2, os painéis B1 e B2 mostram os parâmetros dos quatro regimes econômicos. O colapso é o regime mais pessimista para os retornos de *Mkt- $r_f$* , *SMB* e *HML*, e sua correlação é maior do que em outros regimes, sugerindo que o tamanho e o BM têm um impacto limitado sobre os retornos do colapso. Em contrapartida, o colapso é o regime mais otimista para o MOM: os parâmetros estimados mostram que os estados de colapso e recuperação geram impulso para as ações. Ou seja, quando o mercado gera prêmios de risco extremos positivos ou negativos, a distância entre

vencedores e perdedores (momentum alto e baixo) aumenta. Por outro lado, esse efeito não é observado nos índices *book-to-market*, o que podemos supor que se deva à frequência de atualização do valor contábil, que geralmente é maior do que a duração do regime. No entanto, as probabilidades ergódicas e a duração ainda revelam que os colapsos são raros e curtos, ocorrendo apenas 3,58% do tempo e durando em média oito semanas. Na maior parte do tempo, a economia está em um dos três estados restantes. Os mercados em baixa e em alta são os regimes menos extremos, mas ambos geralmente fazem a transição para uma recuperação, sendo que a mais provável ocorre em 44,95% das vezes.



**Figura 1.** Probabilidades fora da amostra

**Notas:** As probabilidades fora da amostra são as probabilidades filtradas de  $t + 1$  em  $t$ , estimadas considerando as janelas de dados descritas na Seção 2.4.

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A Figura 1 mostra que o mercado em alta, apesar de sua longa duração, é menos recorrente do que o mercado em baixa e o estado de recuperação. Os últimos cinco anos do exercício ilustram a relevância de um modelo de múltiplos regimes para uma estratégia ativa em um portfólio baseado em fatores. Apesar do colapso de 2020 e do mercado em alta de 2021, desde 2017, os regimes mais frequentes são o mercado em baixa e a

recuperação. Embora os retornos esperados do *SMB* sejam aproximadamente semelhantes no mercado de baixa e na recuperação, eles não são tão impactantes quanto os do *HML* e do *MOM* em cada estado. Os retornos de *Mkt- $r_f$* , *HML* e *MOM* mudam de sinal entre esses dois estados, e um investidor passivo ou ativo que não considere a estrutura de mudança de regime provavelmente não capturaria essas mudanças de estado.

**Tabela 3**  
Resultados fora da amostra

Estratégias	Retorno (%)	Vol. (%)	Assimetria (%)	Curtose	MDD (%)	Alavancagem (%)		
						5° Perc.	Média	Máxima
<i>Modelos de estado único sem alavancagem</i>								
1/n	14,58	8,06	-108,96	7,02	16,06	0,00	0,00	0,00
RU Rest	14,80	9,99	-75,48	5,59	16,87	0,00	0,00	0,00
<i>Modelos de estado único alavancados</i>								
Tangência	15,05	13,03	-106,38	9,70	32,06	0,00	6,08	55,33
RU	14,54	11,17	-80,34	4,54	20,22	0,00	12,51	37,76
<i>Modelo de múltiplos regimes não alavancado</i>								
CGL MaxLev 0%	15,65	6,33	-19,06	2,18	5,97	0,00	0,00	0,00
<i>Modelos de múltiplos regimes alavancados</i>								
CGL MaxLev 50%	17,76	10,55	-22,67	1,72	13,12	0,00	29,97	50,00
CGL MaxLev 100%	19,76	14,81	-18,97	2,30	19,25	4,59	65,11	100,00
CGL MaxLev 150%	21,56	18,74	-14,59	2,85	28,73	9,79	99,28	150,00
CGL MaxLev 200%	23,16	22,24	-20,14	2,96	37,84	15,46	131,71	200,00
CGL MaxLev 250%	24,28	25,25	-31,39	3,15	45,22	17,96	160,12	250,00
CGL Irrestrito	28,86	34,40	-37,99	4,52	55,05	25,40	244,02	716,84

**Notas:** A tabela apresenta os resultados do exercício fora da amostra de 08/01/2003 a 19/12/2022. Ela mostra os retornos médios semanais anualizados e as volatilidades (vol.). Os retornos são absolutos, ou seja, não são retornos em excesso, e são líquidos de custos de transação. A tabela também mostra a assimetria, a curtose (não o excesso de curtose) e o drawdown máximo (MDD). A alavancagem é a soma de todos os pesos da estratégia que excedem 100% para cada observação; ela não leva em conta a alavancagem intrínseca dos fatores. As colunas mais à direita mostram o 5º percentil, a média e a alavancagem máxima. A alavancagem mínima é zero para o modelo CGL ótimo; portanto, ela também é zero para cada variação do CGL. Os CGL MaxLev de 0% a 250% usam o método de restrição de alavancagem introduzido por Lewin e Campani (2022), enquanto o CGL Irrestrito é a estratégia sem essa restrição. As estratégias RU e CGL foram otimizadas para  $\gamma = 5$ .

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

### 3.3 Desempenho Fora da Amostra

A Tabela 3 apresenta as carteiras baseadas em fatores usando as estratégias de estado único e de múltiplos regimes. O portfólio igualmente ponderado 1/n é o *benchmark* da estratégia passiva. Sua volatilidade é menor do que a de qualquer outra estratégia ativa de estado único no exercício, mas maior do que a do CGL MaxLev 0%, cujos retornos superam os da estratégia de estado único. Os momentos estatísticos de ordem superior (assimetria e curtose) também sugerem que o modelo CGL oferece menor risco do que os *benchmarks*. Ao mesmo tempo, o CGL MaxLev 0% teve o único *maximum drawdown* (MDD, ou perda máxima) de um dígito. Isso revela os resultados promissores de usar modelos de múltiplos regimes para diversificar portfólios baseados em fatores, empregando uma função de utilidade mais realista, a função de utilidade recursiva estocástica.

A Tabela 3 mostra que a alavancagem dos modelos de estado único varia até 55,33%, tornando o CGL MaxLev 50%

seu *benchmark* mais adequado. Além disso, seu 5º percentil e a alavancagem média são iguais ou mais próximos, enquanto qualquer alavancagem máxima definida entre 0% e 50% não afeta significativamente as conclusões. Por outro lado, os CGL MaxLev 100% a 250% e o CGL Irrestrito ilustram diferentes configurações de risco em que a volatilidade é menor ou próxima à do IBx 100 (a Tabela 2 mostra que a volatilidade do fator de mercado é de 27,95% a.a., o que é praticamente o mesmo em retornos absolutos). Entretanto, como os CGL MaxLev 100% a 250% não têm um *benchmark* de alavancagem semelhante para comparação, eles são suprimidos nas Tabelas 4 e 5 para simplificar.

A Tabela 4 nos permite comparar as estratégias de acordo com a relação risco/retorno. Como o índice de Sharpe é amplamente utilizado no mercado, apesar de suas limitações, propomos usá-lo inicialmente para comparar as carteiras (posteriormente, na Tabela 5, apresentamos outro método para classificar as carteiras).

A Tabela 4 mostra que, no período de 2003 a 2022, os índices de Sharpe dos CGL MaxLev 0% e 50% ultrapassaram



62%, enquanto os *benchmarks* atingiram apenas 43%. Assim, o modelo CGL superou os *benchmarks* de risco/retorno no exercício completo. Além disso, o CGL MaxLev 0%, que consistentemente apresentou a menor volatilidade, ofereceu um índice de Sharpe mais alto do que ambos ou pelo menos um dos *benchmarks* não alavancados em cada intervalo de quatro anos. Enquanto isso, os CGL MaxLev 0% e 50% são as únicas estratégias sem um índice de Sharpe negativo.

Esses resultados aumentam a evidência de que o modelo CGL é uma estratégia competitiva para diversificar portfólios baseados em fatores em horizontes de investimento mais curtos. Considerando, por exemplo, que estamos falando de investidores diversificados, quando

o CGL MaxLev 0% supera o índice de Sharpe da carteira  $1/n$ , isso mostra que o modelo de três fatores de Fama e French (1993), com a adição do fator momentum de Carhart (1997), não é suficiente para explicar as variações nos retornos das ações brasileiras usando apenas uma estratégia ingênua de pesos iguais. Em outras palavras, os resultados acima mencionados fornecem evidências adicionais de que é necessário aplicar uma estratégia ativa para diversificar entre esses fatores de risco no Brasil. Além disso, quando o exercício revela que o índice de Sharpe do CGL MaxLev 50% supera seus *benchmarks*, as carteiras RU e Tangência, isso indica que o modelo CGL oferece uma estratégia superior à de seus pares comparáveis.

**Tabela 4**  
Índice de Sharpe (%)

Painel A	2003-2022			2003-2006			2007-2010		
	Retorno	Vol.	Sharpe	Retorno	Vol.	Sharpe	Retorno	Vol.	Sharpe
<i>Modelos de estado único sem alavancagem</i>									
1/n	14,58	8,06	42,90	26,18	7,49	105,03	15,30	7,63	57,70
RU Rest	14,80	9,99	36,82	24,80	10,93	59,31	11,13	9,29	2,45
<i>Modelos de estado único alavancados</i>									
Tangência	15,05	13,03	30,14	25,12	14,27	47,69	11,26	9,54	3,76
RU	14,54	11,17	30,58	23,53	12,71	41,06	10,54	11,32	-3,14
<i>Modelo de múltiplos regimes não alavancado</i>									
CGL MaxLev 0%	15,65	6,33	71,58	26,86	7,18	119,00	15,83	6,40	77,07
<i>Modelo de múltiplos regimes alavancado</i>									
CGL MaxLev 50%	17,76	10,55	62,92	28,44	11,65	86,91	17,85	10,73	64,81
Painel B	2011-2014			2015-2018			2019-2022		
	Retorno	Vol.	Sharpe	Retorno	Vol.	Sharpe	Retorno	Vol.	Sharpe
<i>Modelos de estado único sem alavancagem</i>									
1/n	5,53	6,90	-60,00	15,27	8,14	54,36	11,62	9,75	55,42
RU Rest	12,88	7,37	43,57	9,37	9,96	-14,88	16,48	11,83	86,74
<i>Modelos de estado único alavancados</i>									
Tangência	14,40	8,47	55,85	7,38	17,87	-19,38	17,87	12,82	90,94
RU Não Rest	14,31	8,27	56,10	8,47	10,81	-21,95	16,43	12,22	83,54
<i>Modelo de múltiplos regimes não alavancado</i>									
CGL MaxLev 0%	11,20	5,94	25,86	14,22	5,97	56,51	10,85	5,91	78,24
<i>Modelo de múltiplos regimes alavancado</i>									
CGL MaxLev 50%	14,95	10,21	51,74	15,70	10,29	47,17	12,50	9,80	64,07

**Notas:** A tabela mostra o índice de Sharpe do exercício fora da amostra (2003-2022) e em intervalos de quatro anos. Mostra os retornos médios semanais anualizados e as volatilidades (vol.). Os retornos são absolutos, ou seja, não são retornos em excesso, e são líquidos de custos de transação. Os CGL MaxLev 0% e 50% usam o método de restrição de alavancagem introduzido por Lewin e Campani (2022). Suprimimos o modelo CGL de maior alavancagem, pois não há comparação de alavancagem adequada. As estratégias RU e CGL foram otimizadas para  $\gamma = 5$ .

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A Tabela 5 indica as diferenças nos retornos dos equivalentes de certeza anualizados ( $\Delta CER$ ) e seus intervalos de confiança. Para  $\Delta CER$  positivo e intervalos de confiança positivos, a primeira linha mostra que o CGL MaxLev 0% supera o 1/n e o RU Rest com significância

estatística. Da mesma forma, a segunda linha fornece evidências para a comparação com carteiras alavancadas: CGL MaxLev 50% supera estatisticamente o desempenho das carteiras Tangência e RU.

**Tabela 5**  
Diferenças de retornos dos equivalentes de certeza ( $\Delta CER$ , %)

Modelo de múltiplos regimes	Modelo de estado único			
	1/n	RU Rest	Tangência	RU
CGL MaxLev 0%	1,30	2,09	1,90	5,30
	[0,90 - 2,19]	[0,43 - 3,84]	[-1,01 - 2,93]	[-4,54 - 8,86]
CGL MaxLev 50%	3,82	4,22	2,22	5,82
	[0,86 - 6,14]	[-1,75 - 6,71]	[0,27 - 3,49]	[1,14 - 7,78]

**Notas:** A tabela mostra as diferenças entre os retornos dos equivalentes de certeza anualizados ( $\Delta CER$ ) calculados usando retornos absolutos líquidos de custos de transação. As diferenças correspondem ao CER dos modelos mostrados nos painéis horizontais, menos o CER dos benchmarks nas colunas, calculados como na Seção 2.7. Os painéis horizontais mostram os CGL MaxLev 0% e 50%. Suprimimos o modelo CGL de maior alavancagem, pois não há comparação de alavancagem adequada. As estratégias RU e CGL foram otimizadas para  $\gamma = 5$ . Abaixo do  $\Delta CER$ , relatamos os intervalos de confiança bootstrap de 95% extraídos de 1.000.000 de amostras com substituição usando o método de percentil acelerado e com correção de viés. O exercício fora da amostra foi realizado com observações semanais de 08/01/2003 a 19/12/2022.

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

## 4. CONCLUSÃO

De acordo com Perez-Quiros e Timmermann (2000), Black e McMillan (2004), Guidolin e Timmermann (2008b), Tu (2010), Gulen et al. (2011) e Chincoli e Guidolin (2017), o uso de modelos de múltiplos regimes para diversificar portfólios baseados em fatores apresenta resultados promissores. Reforçamos essa conclusão em um cenário ampliado. Nos mercados desenvolvidos, a literatura apresenta isso em termos da função *power-utility*. Nos mercados emergentes, ela o apresenta em uma estrutura ainda mais simples, com preferências de utilidade quadrática. Portanto, propomos preencher a lacuna na literatura sobre investimento baseado em fatores usando uma função de utilidade mais realista: a função de utilidade recursiva estocástica. Também nos concentramos em um único mercado emergente, o Brasil, devido à sua relevância regional e para evitar o impacto das taxas de câmbio sobre as estimativas.

Criamos um exercício fora da amostra para comparar o modelo CGL com estratégias de diversificação passivas e ativas como *benchmarks*. Como a solução ótima das estratégias de múltiplos regimes geralmente indica alta alavancagem, usamos o procedimento MaxLev de Lewin e Campani (2022) para restringir os pesos do portfólio CGL a fim de manter a estratégia viável para fins práticos. O procedimento foi ainda mais necessário para evitar a alavancagem excessiva, uma vez que os

fatores são intrinsecamente alavancados, já que eles compram (*long*) e vendem (*short*) suas carteiras de ações subjacentes. Como resultado, usamos o CGL MaxLev 0% para comparar com os *benchmarks* não alavancados e o CGL MaxLev 50% para comparar com os *benchmarks* alavancados. A Seção 4.3 mostra que o 5º percentil, a mediana e a alavancagem máxima do CGL MaxLev 50% são os mais próximos dos *benchmarks* alavancados. Portanto, esse foi o portfólio CGL mais adequado para compará-los, enquanto a definição da alavancagem máxima entre 0% e 50% não afetou significativamente nossas conclusões.

Os índices de Sharpe indicam que tanto as estratégias alavancadas quanto as não alavancadas do CGL superaram os *benchmarks* na amostra completa. Nas subamostras mais curtas, em primeiro lugar, observamos que o CGL MaxLev 0% apresenta consistentemente a menor volatilidade e, ao mesmo tempo, oferece um índice de Sharpe superior a pelo menos um dos *benchmarks* não alavancados. Em segundo lugar, diferentemente de todos os *benchmarks*, os índices de Sharpe das estratégias CGL alavancadas e não alavancadas são positivos em todas as subamostras examinadas. Por fim, como uma verificação de robustez, os retornos dos equivalentes de certeza revelam que ambas as estratégias CGL superaram seus *benchmarks* com significância estatística.

A pesquisa atual mostra que os modelos de múltiplos regimes oferecem estratégias competitivas para diversificar eficientemente as carteiras baseadas em fatores no mercado acionário brasileiro. Estudos futuros podem incluir mais fatores e outros mercados. Outro caminho para uma investigação mais aprofundada é usar uma frequência de dados maior para atualizar os fatores com mais frequência. Por exemplo, atualizações rápidas para classificar ações de

empresas com tamanho pequeno, neutro e grande podem produzir uma estratégia de momentum ainda melhor. Destacamos que investidores sofisticados e gestores de fundos poderiam aplicar a metodologia usada neste artigo para criar estratégias avançadas baseadas em fatores de risco que possam se beneficiar da gestão ativa. Ao fazer isso, é provável que superem o desempenho de todos os fatores, ou pelo menos da maioria deles, no longo prazo.

## REFERÊNCIAS

- Ang, A. (2014). *Asset management: A systematic approach to factoring investing*. Oxford University Press, 2014.
- Asness, C., Moskowitz, T., & Pedersen, L. (2013). Value and momentum everywhere. *Journal of Finance*, 68(3), 929–985. <https://doi.org/10.1111/jofi.12021>
- Barroso, P., & Santa-Clara, P. (2015). Momentum has its moments. *Journal of Financial Economics*, 116(1), 111–120. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.11.010>
- Black, A., & McMillan, D. (2004). Non-linear predictability of value and growth stocks and economic activity. *Journal of Business Finance & Accounting*, 31, 439–474. <https://doi.org/10.1111/j.0306-686X.2004.00546.x>
- Blitz, D. (2020). Factor performance 2010–2019: A lost decade? *The Journal of Beta Investment Strategies*, 11(2), 57–65. <https://doi.org/https://doi.org/10.3905/jii.2020.1.090>
- Campani, C. H., & Garcia, R. (2019). Approximate analytical solutions for consumption/investment problems under recursive utility and finite horizon. *The North American Journal of Economics and Finance*, 48, 364–384. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2019.03.005>
- Campani, C. H., Garcia, R., & Lewin, M. (2021). Optimal portfolio strategies in the presence of regimes in asset returns. *Journal of Banking and Finance*, 123(106030), 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2020.106030>
- Carhart, M. (1997). On persistence in mutual fund performance. *Journal of Finance*, 52(1), 57–82. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x>
- Chague, F., & Bueno, R. (2008). The CAPM and Fama-French models in Brazil. *Latin American Meeting of the Econometric Society, working paper*.
- Chen, J., & Kawaguchi, Y. (2018). Multi-factor asset-pricing models under Markov regime switches: Evidence from the Chinese stock market. *International Journal of Financial Studies*, 6(2). <https://doi.org/10.3390/ijfs6020054>
- Chincoli, F., & Guidolin, M. (2017). Linear and nonlinear predictability in investment style factors: Multivariate evidence. *Journal of Asset Management*, 18(6), 476–509. <https://doi.org/10.1057/s41260-017-0048-5>
- Daniel, K., & Moskowitz, T. (2016). Momentum crashes. *Journal of Financial Economics*, 122(2), 221–247. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2015.12.002>
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075>
- Duffie, D., & Epstein, L. G. (1992). Stochastic differential utility. *The Econometric Society*, 60(2), 353–394. <https://doi.org/10.2307/2951600>
- Fama, E. (2017). *The Fama portfolio: Selected papers of Eugene F. Fama*. University of Chicago Press. <https://doi.org/10.7208/chicago/9780226426983.001.0001>
- Fama, E., & French, K. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3–56. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5)
- Fama, E., & French, K. (2015). Dissecting anomalies with a five-factor model. *Review of Financial Studies*, 29(1), 69–103. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhv043>
- Ferson, W., Siegel, A., & Xu, P. (2006). Mimicking portfolios with conditioning information. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 41(3), 607–635. <https://doi.org/10.1017/S0022109000002556>
- Fugazza, C., Guidolin, M., & Nicodano, G. (2015). Equally weighted vs. long-run optimal portfolios. *European Financial Management*, 21(4), 742–789. <https://doi.org/10.1111/eufm.12042>
- Gârleanu, N., & Pedersen, L. (2013). Dynamic trading with predictable returns and transaction costs. *The Journal of Finance*, 68(6), 2309–2340. <https://doi.org/10.1111/jofi.12080>
- Guidolin, M., & Hyde, S. (2012). Can VAR models capture regime shifts in asset returns? A long-horizon strategic asset allocation perspective. *Journal of Banking and Finance*, 36(3), 695–716. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2011.10.011>
- Guidolin, M., & Ono, S. (2006). Are the dynamic linkages between the macroeconomy and asset prices time-varying? *Journal of Economics and Business*, 58(5–6), 480–518. <https://doi.org/10.1016/j.jeconbus.2006.06.009>
- Guidolin, M., & Timmermann, A. (2007). Asset allocation under multivariate regime switching. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(11), 3503–3544. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2006.12.004>
- Guidolin, M., & Timmermann, A. (2008a). International asset allocation under regime switching, skew, and kurtosis preferences. *The Review of Financial Studies*, 21(2), 889–935. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhn006>
- Guidolin, M., & Timmermann, A. (2008b). Size and value anomalies under regime shifts. *Journal of Financial*

- Econometrics*, 6(1), 1–48. <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbm021>
- Gulen, H., Xing, Y., & Zhang, L. (2011). Value versus growth: Time-varying expected stock returns. *Financial Management*, 40(2), 381–407. <https://doi.org/10.1111/j.1755-053X.2011.01146.x>
- Haghani, V., & Dewey, R. (2016). A case study for using value and momentum at the asset class level. *Journal of Portfolio Management*, 42(3), 101–113. <https://doi.org/10.3905/jpm.2016.42.3.101>
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *The Econometric Society*, 57(2), 357–384. <https://doi.org/10.2307/1912559>
- Honda, T. (2003). Optimal portfolio choice for unobservable and regime-switching mean returns. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(1), 45–78. [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(02\)00106-9](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(02)00106-9)
- Hou, K., Xue, C., & Zhang, L. (2015). Digesting anomalies: An investment approach. *The Review of Financial Studies*, 28(3), 650–705. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhu068>
- Lewin, M., & Campani, C. H. (2020a). Portfolio management under multiple regimes: Strategies that outperform the market. *Revista de Administração Contemporânea*, 24(4), 300–316. <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2020190161>
- Lewin, M., & Campani, C. H. (2020b). Portfolio management under multiple regimes: Out-of-sample performance. *Brazilian Review of Finance*, 18(3), 52–79. <https://doi.org/10.12660/rbfin.v18n3.2020.81210>
- Lewin, M., & Campani, C. H. (2022). Constrained portfolio strategies in a regime-switching economy. *Financial Markets and Portfolio Management*, 37, 27–59. <https://doi.org/10.1007/s11408-022-00414-x>
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47, 13–37. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-780850-5.50018-6>
- Liu, H. (2011). Dynamic portfolio choice under ambiguity and regime switching mean returns. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35(4), 623–640. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2010.12.012>
- Nystrup, P., Boyd, S., Lindström, E., & Madsen, H. (2019). Multi-Period Portfolio Selection with Drawdown Control. *Annals of Operations Research*, 282(1–2), 245–271. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2947-3>
- Perez-Quiros, G., & Timmermann, A. (2000). Firm size and cyclical variations in stock returns. *Journal of Finance*, 55(3), 1229–1262. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00246>
- Rouwenhorst, G. (1999). Local return factors and turnover in emerging stock markets. *Journal of Finance*, 54(4), 1439–1464. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00151>
- Santos, J., Famá, R., & Mussa, A. (2012). A adição do fator de risco momento ao modelo de precificação de ativos dos três fatores de Fama & French aplicado ao mercado acionário brasileiro. *REGE-Revista de Gestão*, 19(3), 453–472. <https://doi.org/10.5700/rege473>
- Sass, J., & Haussmann, U. (2004). Optimizing the terminal wealth under partial information: The drift process as a continuous time Markov chain. *Finance and Stochastics*, 8(4), 553–577. <https://doi.org/10.1007/s00780-004-0132-9>
- Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3)425–442. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
- Tu, J. (2010). Is regime switching in stock returns important in portfolio decisions? *Management Science*, 56(7), 1198–1215. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1100.1181>
- Wachter, J. (2002). Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(1), 63–91. <https://doi.org/10.2307/3594995>

## FINANCIAMENTO

Marcelo Lewin gostaria de agradecer às seguintes instituições brasileiras pelo apoio financeiro à sua pesquisa: a Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ). Carlos Heitor Campani gostaria de agradecer às seguintes instituições brasileiras pelo apoio financeiro à sua pesquisa: o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a FAPERJ.