R. Fac. Educ., São Paulo
16(1/2):97-131,jan./dez.1990.

O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE

Adriano Rodrigues RUIZ*
Anna Maria Pessoa de CARVALHO**

RESUMO: Neste trabalho testamos uma metodologia para o ensino de proporções, com ênfase na formação do conceito de proporcionalidade, levando em consideração o fato de que o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento bastante complexa. Com essa preocupação, desenvolvemos as atividades de ensino, explorando situações manipulativas e utilizando conceitos que apresentam parentesco próximo com proporções. Isso possibilitou aos alunos compreender a inclusão dos dois pares de termos que constituem uma proporção nos conjuntos domínio e imagem da função linear, que é modelo de invariança das proporções.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática. Formação de Conceito. Raciocínio Proporcional. Função Linear.

1. Preocupações com o conceito de Proporcionalidade

O conceito de proporcionalidade é muito importante, sendo pré-requisito para o entendimento de vários assuntos matemáticos e, também, para a compreensão das relações quantitativas nas Ciências. Além disso, é parte importante do sistema integrado de operações mentais que Piaget denomina Pensamento Operacional Formal.

---

* Professor de Prática de Ensino da Universidade Estadual de Maringá/Paraná.

** Professora Titular do Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Em virtude da importância do raciocínio proporcional encontramos trabalhos que buscam respostas para duas perguntas fundamentais:

- Como crianças e adolescentes raciocinam para resolver problemas de proporcionalidade?
- Que procedimentos são mais produtivos para o ensino de proporções?

Através de uma breve revisão buscaremos melhor situar essas duas preocupações.

1.1 COMO CRIANÇAS E ADOLESCENTES RACIOCINAM PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE?

Com essa preocupação encontramos vários pesquisadores, entre os quais podemos citar: Inhelder e Piaget (1972), que investigam essa aquisição cognitiva, com uma preocupação eminentemente teórica, demonstrando a vinculação do raciocínio proporcional com o grupo de quaternalidade INRC.

Com preocupações centradas no aspecto matemático desse conceito, buscando identificar estratégias que crianças e adolescentes usam para resolver problemas que envolvem proporcionalidade, encontramos: R. Karplus e Peterson (1970); R. Karplus e E. Karplus (1972); Wollman e Karplus (1974); Noelting (1980-a, 1980-b); Karplus, Pulos e Stage (1981), todos comprovando que apenas uma pequena fração de escolares, na faixa dos 12 a 15 anos de idade, utiliza com sucesso o raciocínio proporcional, mesmo quando são propostas simples questões de razões.

Apesar dos modelos experimentais usados serem bastante diferentes, os resultados são convergentes e, em síntese, apontam como aspectos relevantes:

- Mesmo sendo um conteúdo presente nos currículos de Matemática, da escola de 1º grau, o conceito de proporcionalidade raramente é utilizado com correção por escolares com menos de 15 anos de idade.
- A aplicação do raciocínio proporcional torna-se mais difícil quando desacompanhada do efeito material, por exemplo: é mais fácil a criança entender a relação entre o comprimento de um bastão e o tamanho de sua sombra que entender simples relações numéricas, como uma aplicação do teorema de Tales.
- Com referência às estratégias adotadas para a resolução de problemas uma, não correta, surge com grande freqüência: é conceber a proporção como uma relação de caráter aditivo, ou seja, se $a/b = c/d$ então: $a-b = c-d$, ao invés de: $ad = bc$.

Estas constatações têm gerado uma preocupação bastante consistente: o conceito de proporcionalidade, cuja aplicação é indispensável tanto no estudo de Matemática como para o estudo de Ciências, precisa ser ensinado no 1º grau, possibilitando ao aluno sua aplicação em diferentes contextos.

Contudo, o problema não se resume em ensinar, mas, sobretudo, em **como** ensinar. O conteúdo de razões e proporções é normalmente ensinado na escola de 1º grau, porém, a forma costumeira de desenvolver esse assunto (razão como sendo uma fração, proporção sendo a igualdade de duas razões), segundo os resultados colhidos pelos pesquisadores que citamos, pouco tem contribuído para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Como conseqüência da necessidade do ensino desse conceito e dos resultados insatisfatórios que têm sido alcançados surge a necessidade de se buscar novas alternativas para o ensino de proporções.

1.2 QUE PROCEDIMENTOS SÃO MAIS PRODUTIVOS PARA O ENSINO DE PROPORÇÕES?

Tomando por referência as pesquisas que citamos, a forma rotineira de se trabalhar proporções (emprestando grande ênfase ao algorítmo dos produtos cruzados) não tem sido das mais produtivas.

Em decorrência disso, encontramos pesquisadores procurando novas alternativas para o ensino de proporções, dentro de um contexto que privilegia a utilização de idéias gerais, buscando uma maior horizontalidade (utilização de conceitos que apresentam parentesco próximo com proporções) e, também, evitando a algoritmização precoce.

Nessa linha de preocupação, com um ensino que não se prenda a compartimentos estanques, encontramos Carpenter (1976), que afirma ser necessário que o ensino não se prenda a transmitir técnicas, sendo mais importante focalizar uma seqüência de idéias, incluindo o trabalho inicial com o conceito de frações. Segundo Carpenter, essa seqüência de idéias será alcançada na medida em que for dada a devida relevância ao parentesco entre os diversos assuntos.

Van Den Brink e Streefland (1978) relatam um trabalho com essas características. Eles trabalham com crianças na faixa de 6 aos 8 anos, sendo que, nas atividades desenvolvidas, procuram explorar a idéia de semelhança e não-semelhança que as crianças já têm.

Além da formação do conceito de proporcionalidade, preocupam-se em tornar as crianças conscientes da maneira como pensam ao resolver questões que envolvem proporções.

Kurtz e Karplus (1979) apresentam uma experiência destinada ao ensino de proporções, desenvolvida visando capacitar alunos de nona e décima séries (crianças por volta dos 14 ou 15 anos) para aplicação do raciocínio proporcional.

Nesse trabalho, usam materiais manipuláveis que, segundo eles, favorecem a participação ativa de todos os alunos e, além disso, formam uma base concreta para a formação do conceito de proporcionalidade e facilitam a interação do grupo.

A grande preocupação que eles revelam, é propiciar aos estudantes prática para distinguir três tipos de relações constantes: razão constante, soma constante e diferença constante, porque essas relações freqüentemente não são distinguidas adequadamente.

Outra preocupação expressa por Kurtz e Karplus (1979) é evitar técnicas algorítimas como, por exemplo, a igualdade entre os produtos dos meios e dos extremos.

Outro pesquisador, que manifesta muita preocupação com os possíveis inconvenientes de um ensino de Matemática centrado em algoritmos, é Freudenthal (1981); ele afirma que a grande ênfase em técnicas pode estar criando um grande número de pessoas desenvolvidas abaixo de seu próprio potencial.

Freudenthal, citando os maiores problemas do ensino de Matemática, aborda a ausência de uma esquematização progressiva no ensino de assuntos matemáticos e também na linguagem matemática, apontando o antagonismo de duas posições: entendimento e compreensão versus costume, rotina, exercícios feitos com regularidade e algorítmos.

Segundo Freudenthal, é importante que o ensino vise, basicamente, ao entendimento do aluno. O entendimento não pode dar lugar à memorização, geralmente buscada em Matemática através de grande quantidade de treinamento repetitivo.

Para Freudenthal, a maior parte da Matemática abstrata pode ser desenvolvida dentro de um contexto concreto, facilitando assim o entendimento e a retenção.

Dentro da perspectiva de explorar simultaneamente assuntos que apresentam parentesco, o conceito de frações assume uma importância muito grande quando voltamos nossas atenções para o ensino de proporções, especialmente quando esse ensino enfatiza a formação do conceito de fração.

Trabalhando com frações, dentro de um universo bastante amplo, encontramos Streefland (1982-a) afirmando que entendimento de um conceito deve ser prioritário, relegando a algoritmização a, apenas, um plano destinado a simplificar a aplicação do conceito aprendido. Dispensa muita atenção à interligação entre os diversos assuntos, evitando assim a sobreposição vertical de compartimentos estanques.

Outro aspecto significativo, abordado por Streefland (1982-a), é a necessidade de a criança ter modelos para servirem de suporte na formação de conceitos. Dentro dessa concepção, no estudo de razões e proporções, ele aponta o fenômeno objeto vertical-sombra como um modelo rico em alternativas a serem exploradas, emglobando uma grande série de possibilidades para atividades referentes a razões e proporções, destinadas a alunos do 1º grau.

A razão da importância desse modelo é que a altura do objeto colocado verticalmente e a sua sombra, num determinado momento, são ligados de forma constante, constituindo-se esse fenômeno num ótimo suporte para desenvolvimento das idéias de razões e proporções. Para Streefland, num estágio mais formal, o fenômeno objeto vertical-sombra pode atuar como modelo que precede o último modelo de invariança de proporções - a função linear.

Streefland (1982-b) relata uma experiência sobre o ensino de subtração de frações, com denominadores diferentes, rica em aspectos a serem explorados na introdução dos conceitos de frações equivalentes, razões e proporções. Para a introdução de frações equivalentes, ele considera como pré-requisitos que os alunos conheçam modelos como: linha numérica em duas escalas, tabelas de razão e o gráfico da função linear.

Nesse trabalho, Streefland utiliza tabela de razão para a introdução do conceito de frações equivalentes e esse procedimento abre possibilidade à exploração simultânea das idéias de razões e proporções.

Dos trabalhos que citamos, podemos extrair alguns aspectos que parecem ser fundamentais para a definição de estratégias visando ao ensino de Matemática a nível de 1º grau e, em particular, para o ensino de proporções; entre eles podemos citar:

- utilizar as noções que a criança já tem, sobre o assunto a ser estudado, por mais elementares que sejam;

- dar muita ênfase ao parentesco entre os diversos assuntos, fugindo de uma organização na qual os conteúdos sejam sobrepostos verticalmente, para que os alunos tenham acesso a idéias gerais;
- dispensar muita atenção à formação do conceito a ser ensinado. A formação do conceito nunca pode ser substituída por um conjunto de regras ou fórmulas;
- utilizar material concreto visando tornar mais acessível aos alunos a constituição mental do conceito, além de favorecer a participação de todos os alunos e facilitar a interação do grupo.

Dentro desse universo de preocupações que acabamos de descrever, desenvolvemos o experimento de uma metodologia para o ensino do conceito de proporcionalidade, dando prioridade à formação do conceito. Dispensamos muita atenção para dois aspectos que nos parecem fundamentais para a formação do conceito de proporcionalidade:

- identificação da proporcionalidade como uma relação de razão constante;
- inclusão de dois pares de termos que constituem uma proporção no conjunto de todos os pares, para os quais a mesma relação é válida, ou seja, os conjuntos domínio e imagem de uma função linear, que é o modelo de invariança das proporções.

2. Nossa proposta para o Ensino de Proporções

Em decorrência do que acabamos de expor, o conceito de proporcionalidade precisa ser ensinado e não pode limitar-se à transmissão de regras e algoritmos para serem memorizados. Dai a preocupação com o ensino de proporções, visando oferecer condições para que o aluno vivencie experiências que o conduzam à formação mental do conceito de proporcionalidade e, a partir disso, possa estabelecer regras e fórmulas.

Dentro dessa linha de trabalho, o nosso problema foi testar uma metodologia para o ensino de proporções, centrada na formação do conceito de proporcionalidade.

Nossa expectativa era a de que, ao oferecer situações de ensino nas quais os alunos explorassem atividades concretas, agindo reflexivamente sobre elas, e em que o conteúdo não fosse tratado de forma estanque, eles conseguissem progressos significativos na aplicação do raciocínio proporcional, tanto em questões não-numéricas como em questões numéricas. Além disso, a retenção de aprendizagem deveria ser bastante satisfatória.

Para testarmos a metodologia que estamos propondo, tomamos como grupo experimental uma 7ª série, do 1º grau, com 39 alunos, de uma escola pública situada na zona urbana do município de Ibiúna.

As nove atividades, preparadas com o objetivo de ensinar o conceito de proporcionalidade, foram desenvolvidas ao longo de 18 aulas de 50 minutos cada uma. Visando assegurar a oportunidade de todos os alunos manusearem o material e discutirem suas idéias com os demais companheiros, as atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos (quatro alunos no máximo) e cada grupo recebeu, em cada uma das aulas, um jogo completo do material necessário.

2.1 Desenvolvimento das Atividades

Na estruturação da seqüência das atividades, organizamos as mesmas, visando estabelecer cinco etapas a serem dominadas pelos alunos. Estas etapas foram as seguintes:

- identificar a proporcionalidade como uma relação de razão constante;
- adquirir habilidade na construção e análise de gráficos cartesianos;
- identificar a função linear representada pelo seu gráfico cartesiano e descobrir, explorando situações concretas, que a relação de razão constante constitui uma função linear;
- trabalhar com contra-exemplos para verificar que, apenas na função linear, os pontos são alinhados e essa reta passa pela origem do sistema cartesiano;
- explorar relações entre coordenadas dos pontos da função linear para extrair a propriedade aditiva das proporções.

Para atividade número 1, o material básico foi um conjunto formado por 25 palitos: eles tinham uma parte pintada e a outra não. Considerando a relação comprimento da parte pintada e comprimento do palito, formavam "famílias", por exemplo: família "dos 1/2"; família "dos 1/3", ...

Nessa atividade, os alunos deveriam dividir os palitos em famílias, justificar o critério utilizado para a identificação de palitos semelhantes, sem recorrer ao uso de régua para medi-los.

Na resolução desta tarefa o que predominou, de início, foram as classificações com base em apenas um atributo: comprimento do palito ou, então, comprimento da parte pintada, Contudo, foi sendo sugerido aos alunos que buscassem descobrir novos critérios de classificação, até que surgiram os agrupamentos que levavam em conta a relação entre os atributos: comprimento da parte pintada e comprimento do palito. Eles utilizaram a parte pintada (ou parte sem pintar) como unidade natural para medir, ao identificar palitos de uma mesma "família". Por exemplo: na "família dos 1/2", usaram a parte pintada como uma unidade para medir, verificando que essa unidade cabia duas vezes no comprimento do palito. E expressaram a proporção obtida das duas grandezas por meio de uma fração.

Na atividade número 2, os alunos trabalharam com conjuntos de quadrados e de retângulos semelhantes, confeccionados em cartolina. O aspecto principal explorado foi que o quociente entre pares de medidas correspondentes (comprimento e largura) de retângulos é constante.

Essa constatação é muito importante porque, como já salientamos anteriormente, a criança concebe essa relação com um caráter aditivo: no lugar de $x/y = x'/y'$ a criança acredita, erradamente, que temos: $x - y = x' - y'$; surge daí a necessidade de exploração de situações que possibilitem ao aluno identificar a proporcionalidade como uma relação de razão constante.

Como avaliação, os alunos receberam pares de retângulos semelhantes e foi pedido que fizessem novos pares de retângulos semelhantes aos dados, contudo, com medidas diferentes. Esta tarefa foi muito importante para o professor verificar a estratégia utilizada (se aditiva ou multiplicativa) e ofereceu oportunidade da rediscussão da questão, quando se fez necessário.

A retomada da questão foi necessária, porque houve soluções aditivas, por exemplo: as medidas dos retângulos dados eram 3cm por 1cm e 4,5cm por 1,5cm. Houve soluções como: 5cm por 3cm e 8cm por 5cm.

Na atividade número 3, foi utilizado o conceito de escala, ainda com a preocupação de que os alunos identificassem a proporção como uma relação de razão constante.

O primeiro aspecto abordado foi a confecção de mapas, plantas de casas e outros modelos reduzidos. Foi discutida a necessidade e o significado da utilização de escala: sua utilidade e aplicações.

A primeira tarefa proposta foi fazer uma planta da sala de aula, localizando um ponto do seu interior (o mapa do tesouro).

sendo que as medidas eram dadas em passos. Esta tarefa foi executada com bastante correção e, para alcançarem a solução, recorreram à escala em cm/passo e, assim, a questão tornou-se bastante fácil.

Como avaliação, foi proposta a seguinte tarefa: cada grupo recebeu um conjunto de 5 plantas da sala de aula e, entre elas, havia apenas duas que estavam feitas corretamente. Eles deveriam descobrir quais plantas estavam de acordo com as dimensões da sala e justificar a escolha. Para resolver esta questão, dispunham de uma trena para determinar as dimensões reais da sala de aula.

Nesta tarefa, só alcançaram êxito os alunos que buscaram verificar se a razão entre as medidas da planta e as correspondentes medidas reais da sala era constante.

Em nossa proposta para o ensino de proporções a base é a função linear. É indispensável, então, que o aluno a identifique pela sua representação gráfica (que é a reta que passa pela origem do sistema cartesiano) e que saiba construir sua representação gráfica. Por isso a ênfase para que o aluno se familiarizasse com a codificação de pontos no plano cartesiano por um par de números, que são as coordenadas num sistema cartesiano. Visando alcançar esse objetivo foram desenvolvidas as atividades números 4 e 5.

Na exploração destas duas atividades, além da localização de pontos no plano cartesiano conhecendo-se as coordenadas dos mesmos, os alunos, a partir de gráficos dados, executaram transformações e analisaram-nas. Nesta fase do trabalho, outra preocupação presente foi a de que os alunos verificassem a existência de transformações nas quais o ponto dado e seu transformado ficam localizados numa reta que passa pelo ponto (0; 0) e em outras transformações isso não ocorre. Essas descobertas eram muito importantes para a seqüência do trabalho, por isso foram muito discutidas com todos os grupos.

As atividades 6 e 7 são semelhantes entre si e, com elas, exploramos a representação gráfica de relações de razão constante utilizando situações manipulativas.

Na atividade número 6, os alunos trabalharam com um conjunto de seis bastões, com tamanhos diferentes, fixados verticalmente. A tarefa consistiu em medir os bastões e as respectivas sombras, determinar o quociente entre o comprimento de cada bastão e a respectiva sombra, localizar no plano cartesiano os pares da forma (comprimento do bastão;

comprimento da sombra projetada pelo bastão), verificar se esses pontos pertencem a uma mesma reta e se essa reta passa pelo ponto (0;0).

Portanto, nesta atividade, houve exploração de dois aspectos muito importantes para a compreensão do conceito de proporcionalidade:

- a identificação da proporcionalidade como uma relação de razão constante;
- a constatação da inclusão dos pares ordenados (comprimento do bastão; comprimento da respectiva sombra) nos conjuntos domínio e imagem da função linear.

Na atividade número 7, os alunos trabalharam com objetos de faces circulares e diâmetros diferentes, por exemplo: pilhas, pedaço de cabo de vassoura, etc.

Nesta atividade, além de se explorarem as idéias de razão constante e a inclusão dos pares da forma (comprimento da circunferência; diâmetro) nos conjuntos domínio e imagem da função linear, foi proposto aos alunos verificar que, se A e B são dois pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, vale a relação: $x_A \cdot y_B = x_B \cdot y_A$.

A primeira parte da atividade número 8, consistiu em fazer a representação gráfica de seis funções definidas por sentenças matemáticas. Entre elas havia funções lineares e funções não-lineares.

Esta atividade foi muito importante por fonecer oportunidade para os alunos constatarem que, em funções não-lineares, não ocorre a relação de razão constante: $x_A \cdot y_B = x_B \cdot y_A$, verificada na função linear.

A atividade número 9 consistiu em tarefas destinadas a introduzir a propriedade aditiva das proporções, expressa por:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad \text{então} \quad \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Esta atividade implica na exploração das relações entre as coordenadas de dois pontos de uma mesma reta que passa pela origem do sitema cartesiano. Essa forma de introduzir a propriedade aditiva foi muito útil, servindo de suporte para a resolução de problemas que requeriam a divisão em partes proporcionais.

Para o desenvolvimento das atividades que acabamos de descrever, além do material instrucional utilizado, assumem uma importância muito grande os papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos. Quanto a procedimentos do professor, que julgamos indispensáveis dentro de nossa proposta, destacamos:

- propor as questões e, pacientemente, dar o tempo necessário para os alunos chegarem às devidas constatações e conclusões;
- agir como um incentivador, evitando que os alunos assumam postura passiva, aguardando respostas prontas;
- intervir apenas quando os alunos, mesmo depois de muito tentar, não conseguirem resolver uma determinada questão;
- dirigir-se apenas raras vezes à classe, com o objetivo de transmitir informações.

Quanto ao trabalho dos alunos, com a utilização de material manipulável, uma preocupação presente tem que ser evitar que as atividades se limitem às experiências meramente físicas, sendo fundamental:

- manusear o material, realizando, em cada atividade, experiências físicas e experiência lógico-matemáticas;
- sentir a necessidade de testar suas opiniões, analisá-las e discuti-las com os colegas;
- operar sobre os fenômenos observados de forma reflexiva, procurando conhecê-los e explicá-los para, posteriormente, chegar a estabelecer leis gerais e suas propriedades.

3. Resultados.

Tomamos como grupo experimental uma 7ª série, do 1º grau, da EPSG "Maria Angerami Scalamandré", escola pública, localizada no município de Ibiúna. Adotando os procedimentos e o material instrucional para ensinar proporcionalidade, citados anteriormente, esperávamos que:

- os alunos do grupo experimental apresentassem progressos significativos quanto à aplicação do raciocínio proporcional, tanto em questões numéricas como em questões não-numéricas;
- os alunos do grupo experimental revelassem nível de retenção bastante satisfatório.

Aplicamos um pré-teste composto por 10 questões que exigiam aplicação do raciocínio proporcinal, sendo 5 questões não-numéricas, cinco questões numéricas. Com a aplicação do pré-teste, constatamos que os alunos, componentes do grupo experimental, eram muito deficientes na aplicação do raciocínio proporcional. Usando uma escala de notas de zero a dez, a média foi 2,8.

Depois disso desenvolvemos, ao longo de 18 aulas, nossa proposta para o ensino de proporções, utilizando as atividades e os procedimentos que citamos anteriormente. Então, aplicamos o pós-teste.

Na tabela I, temos os resultados do grupo da pesquisa no pré-teste e no pós-teste e, também, os resultados obtidos nas partes não-numérica e numérica.

TABELA I - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO PRÉ-TESTE E DO POS-TESTE

Variáveis	Prova	Média X	Desvio padrão	Ganho médio
A prova inteira	Pré-teste Pós-teste	2,8 8,5	1,6 1,9	5,7
Questões não-numérica	Pré-teste Pós-teste	1,6 4,1	1,3 1,4	2,5
Questões numéricas	Pré-teste Pós-teste	1,2 4,4	1,2 1,4	3,2

A comparação dos escores médios obtidos pelos alunos do grupo experimental, tanto na prova inteira como em suas partes, demonstra ter havido, portanto, ganho estatisticamente significativo.

Como nosso objetivo era o de também avaliar a retenção de aprendizagem do conceito de proporcionalidade, seis meses após a aplicação do pós-teste, tornamos a aplicá-lo ao grupo experimental. Na Tabela II, comparamos os resultados do pós-teste com os resultados do teste de retenção.

TABELA II - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO PÓS-TESTE E DO TESTE DE RETENÇÃO.

Variáveis	Prova	Média X	Desvio padrão	Diferença entre médias
A prova inteira	Pós-teste Retenção	8,5 7,7	1,6 2,1	0,8
Questões não-numérica	Pós-teste Retenção	4,1 4,5	1,4 1,0	-0,4
Questões numéricas	Pós-teste Retenção	4,4 3,2	1,4 1,5	1,2

Apesar da diferença entre os escores do pós-teste e da prova de retenção ser estatisticamente significante (0,05), avaliamos o nível de retenção como plenamente satisfatório.

Além desses dados numéricos que citamos, há dois aspectos que julgamos muito importantes:

- um percentual bastante significativo (82%) dos alunos componentes do grupo experimental, ao resolver o pós-teste, alcançou um número de acertos de 70% ou mais e, apenas um aluno, dos 39 componentes do grupo experimental, teve número de acertos inferior a 50%;
- em relação à retenção, 76,9% foi o percentual de alunos que alcançaram índice de acertos de 70% ou mais. Apenas 3 alunos (7,7%) obtiveram número de acertos inferior a 50%.

A nossa experiência, trabalhando em sala de aula, nos tem mostrado que, raramente, com os procedimentos que focalizam, prioritariamente, regras e algoritmos, se consegue resultados satisfatórios com uma porcentagem tão elevada de alunos de uma classe, como foi conseguido neste experimento.

Em virtude dos resultados alcançados pelos alunos do grupo experimental, tanto no pós-teste como no teste de retenção, podemos afirmar que o material instrucional e os procedimentos que adotamos revelaram-se eficientes, constituindo-se numa opção muito válida para o ensino de proporções, buscando uma aprendizagem significativa.

ABSTRACT: In this work we made a testament about methodology by teaching of proportions, in emphasis in the formation of the concept of proportionality, bringing consideration the fact of the proportional ratiocination to involve one structure of thinking too complex. With this worry we developed the activities of teaching by exploring manipulated situations and making use the concepts that presente neighbouring relationship with proportions. That made possible the students to identify the proportionality like a relation of constant reason and to understand the inclusion of the two pairs of terms that constitute one proportion in the conjuncts dominion and image of the linear function, that is the patterns of invariability of the proportions.

KEY-WORDS: Mathematics Education. Formation of the concepts. Proportional ratiocination. Linear function.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CALPENTER, T.P. Notes from National Assessment: Additio and Multiplication With fractions. **The Arithmetic Teacher**. 1976. **23**: 137-141.

FREUDENTHAL, H. Major Problems of Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**. 1981. **12** (2): 133-150.

INHELDER, B. y PIAGET, J. **De la Lógica del Ninõ a la Lógica del Adolescente.** Buenos Aires. Editora Paidos, 1972.

KARPLUS, R. and KAUPLUS, E. F. Intellectual development beyond elelmentary school III: Ratio, a longitudinal study. **School Science and Mathematics**. 1972, **72**: 735-742.

KARPLUS, R. and PETERSON, R. W. Intellectual Development beyond elementary school II: Ratio, a survey. **School Science and Mathematics**. 1970, **70**: 813-820.

KARPLUS, R.; PULOS, S. and STAGE, E. K. Proportional Reasoning of early adolescentes: comparison and missing value problems in three school. For presentation at the Conference for the Psycology of Mathematics Education, 3. Minneapolis, Minesota, 1981.

KURTZ, B. and KARPLUS, R. Intellectual development beyond elementary school VII: Teaching for Proportional Reasoning. **School Science and Mathematics**. 1979, 79 (5): 387-397

MEC/ PREMEN/ UFRGS/ DEF. Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo de 1º grau. 1976.

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. **Educational STudies in Mathematics.** 1980-a, **11** (2): 217-253.

--------. The development of proportional reasoning and ratio concept. Part II: Problem-Structure and sucessive stages; Problem-Solving Strategies and the mechanism of adaptive restruturing. **Educational Studies in Mathematics**. 1980-b. **11** (3) 331-363.

STREEFLAND, L. Some observational Results Concerning the Mental Constitution of Concept of Fractionl. **Educational Studies in Mathematics**. 1982-b. **9** (1): 51-73.

--------. Subtracting Fractions with Different Denominators. **Educacional Studies in Mathematics**. 1982-b. **13**. (3): 233-255.

VAN DEN BRINK and STREEFLAND, L. Yong Children (6-8). Ratio and Proportion. **Educational Studies in Mathematics**. 1979, **23**, 403-420.

WOLLMAN, W. and KARPLUS, R. Inttelectual development elementary school V: using ratio in differing tasks. **School Sience and Mathematics**. 1974, **74**: 593-613.

APÊNDICE

As tarefas constantes de nossa proposta para o ensino de proporcionalidade são as que se seguem.

ATIVIDADE Nº 1

Objetivo: Explicar o conceito de equivalência de frações, utilizando a noção de: quantas vezes a parte cabe no todo.

Material: Jogos com 25 palitos de vários tamanhos, sendo uma parte do palito pintada e a outra não.

Tarefa: - jogo livre para conhecimento do material:

- solicitar aos alunos que dividam os palitos em "famílias" (é fundamental insistir até que formem "famílias" observando a relação entre os atributos: comprimento do palito e comprimento da parte pintada).

- solicita-se que justifique o critério adotado para fazer os agrupamentos (Retirado de CAPES/FUNBEC. Projeto de Ciência Criativa, 1980).

ATIVIDADE Nº 2

Objetivo: Verificar que nun conjunto de figuras semelhantes, como no caso de retângulos, a razão entre o comprimento e a respectiva largura é constante.

Material: - Conjunto de 6 quadrados, com medidas diferentes feitos em cartolina;

- Conjunto formado por 6 retângulos semelhantes, feitos em cartolina, tendo as seguintes dimensões: 3 x 1 cm; 4,5 x 1,5 cm; 6 x 2 cm; 7,5 x 2,5 cm; 9 x 3 cm e 10,5 x 3,5 cm.

Tarefa: Solicitar que os alunos façam medições das figuras, anotanto no quadro as medidas dos retângulos:

	A	B	C	D	E	F
Medida do comprimento						
Medida da largura						
Quociente entre largura e comprimento						

- Será que, dividindo-se a medida do comprimento pela medida da largura, de cada figura, obter-se-á sempre o mesmo quociente?

Por quê?

Avaliação: O professor desenha um par de retângulos semelhantes; os alunos devem desenhar novos pares onde haja a mesma relação que no par dado (Retirado, com alterações, de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF, Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo de 1º grau, 1976).

ATIVIDADE Nº 3

Objetivo: Construir representação reduzida de uma determinada superfície, usando escala, e explorando, para esta, a constatação da atividade anterior: a razão entre medidas correspondentes de figuras semelhantes é constante.

Material: Lápis, papel, régua, um mapa com indicação de escala e plantas da sala de aula da turma, construídas pelo professor.

Tarefa: Conversar com os alunos sobre o que é um mapa, como é feito, ou uma planta, ou qualquer modelo reduzido.

- Realizar uma gincana: a caça dos tesouros na sala de aula, escondendo um objeto para cada grupo de 3 alunos e entregando-lhes as pistas num código. Exemplo: partindo da porta, dê três passos na direção porta-janela; vire à esquerda e procure uma cadeira com um bilhete embaixo do assento, num raio de dois passos. No bilhete estaria escrito: "O tesouro desta equipe encontra-se, a partir do ponto central da sala, 2 passos na direção fundo da sala-quadro negro e quatro passos na direção da parede-janela".

A equipe só ganha a prova se fizer o mapa da sala de aula, em seu tamanho reduzido, guardando as devidas proporções, indicando o mais precisamente possível todas as pistas para chegar ao tesouro e, finalmente, sua localização. Cada equipe receberá um conjunto de pistas próprio, elaborado pelo professor.

Avaliação: Solicita-se aos alunos que identifiquem as boas plantas da sala de aula, entre as várias que o professor lhes terá confeccionado, sendo somente algumas delas corretas, e que descubram em que escalas foram construídas as plantas certas.

(Retirado de MEC/SPREMEN/UFRGS/DEF, Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo de 1º grau, 1976).

ATIVIDADE Nº 4

Objetivo: Localizar pontos num quadrante de um sistema cartesiano, realizar transformações e estabelecer relações entre as coordenadas de pontos.

Material: Lápis e fichas de trabalho.

1ª Tarefa: O professor entregará aos alunos um conjunto de fichas para que façam o que é pedido: uma ficha para decifrar uma mensagem (Ficha nº 1); uma ficha num sistema circular (Ficha nº 2); uma ficha de simetria (Ficha nº 3); umaa ficha de translação (Ficha nº 4); uma ficha de homotetia (Ficha nº 5).

2ª Tarefa: Pedir aos alunos que observem bem as fichas (3), (4) e (5). A seguir, perguntar:

- O que acontece com cada figura?

- Qual delas deslizou, sempre, em linha reta?

- Este desenho aumentou, diminuiu ou ficou do mesmo tamanho?

- Em qual delas poder-se-ia olhar como num espelho a figura transformada?

- O que aconteceu com a figura da Ficha nº 5?

- Ela é do mesmo tamanho daquela que foi apresentada?

3ª Tarefa: Pedir aos alunos que tomem as fichas (3), (4) e (5), colocando, então, os seguintes problemas:

- Ligue cada ponto ao seu transformado e prolongue até as extremidades do papel estes segmentos de reta.

- Observe como estão estes segmentos de reta.

- Quais deles passam pelo ponto (0;0)?

(Retirado do MEC/PREMEN/UFRGS/DEF. Projeto de Integração do Ensino de Ciência e Matemática no currículo do 1º grau, 1976).

Ficha nº 1

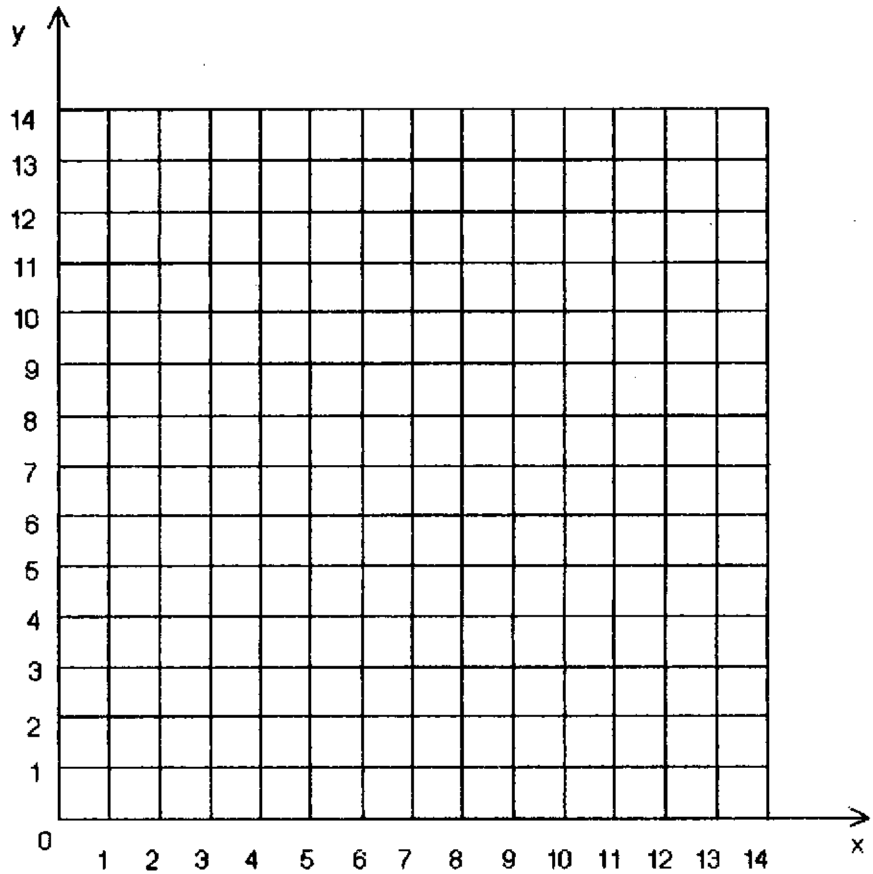
O Diretor do Jardim Zoológico recebe uma mensagem secreta anunciando a chegada de um novo animal.

Encontre os pontos correspondentes aos pares escritos na mensagem.

Liga-os na ordem em que estão escritos e obterás a resposta.

Mensagem secreta:

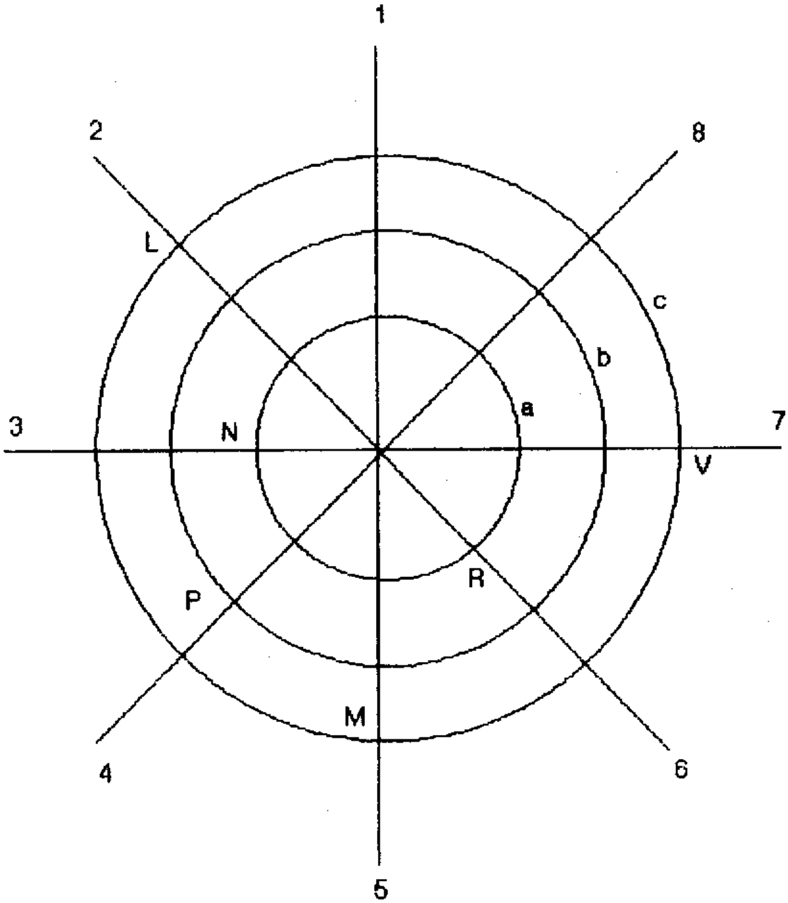
(4,7) - (5,5) - (6,7) - (6,8) - (4,9) - (3,8) - (3,6) - (2,4) - (0,4) - (1,3) - (3,4) - (4,6) - (3,2) - (4,5) - (5,4) - (5,1) - (6,1) - (7,4) - (8,4) - (9,1) - (10,1) - (10,4) - (12,2) - (10,5) - (9,7) - (6,7).



(Retirado de Bray et Clausard, Les Jeux de Valérie et D'Olivier, Paris - 1969).

Ficha nº 2

Olivério e Marcos prepararam, no seu jardim, uma apresentação de circo. Eles dão a cada um dos convidados uma entrada, que lhes permitirá encontrar um lugar. Na entrada de João (J) está escrito (b,1).



Complete: Mariane terá a entrada (M):
Natália terá a entrada (N):
Valéria terá a entrada (V):
Lourenço terá a entrada (L):
Patrício terá a entrada (P):
Rolando terá a entrada (R):

(Retirado de Bray et Clausard, Les Jeux de Valérie et d'Olivier Paris - 1969).

Ficha nº 3

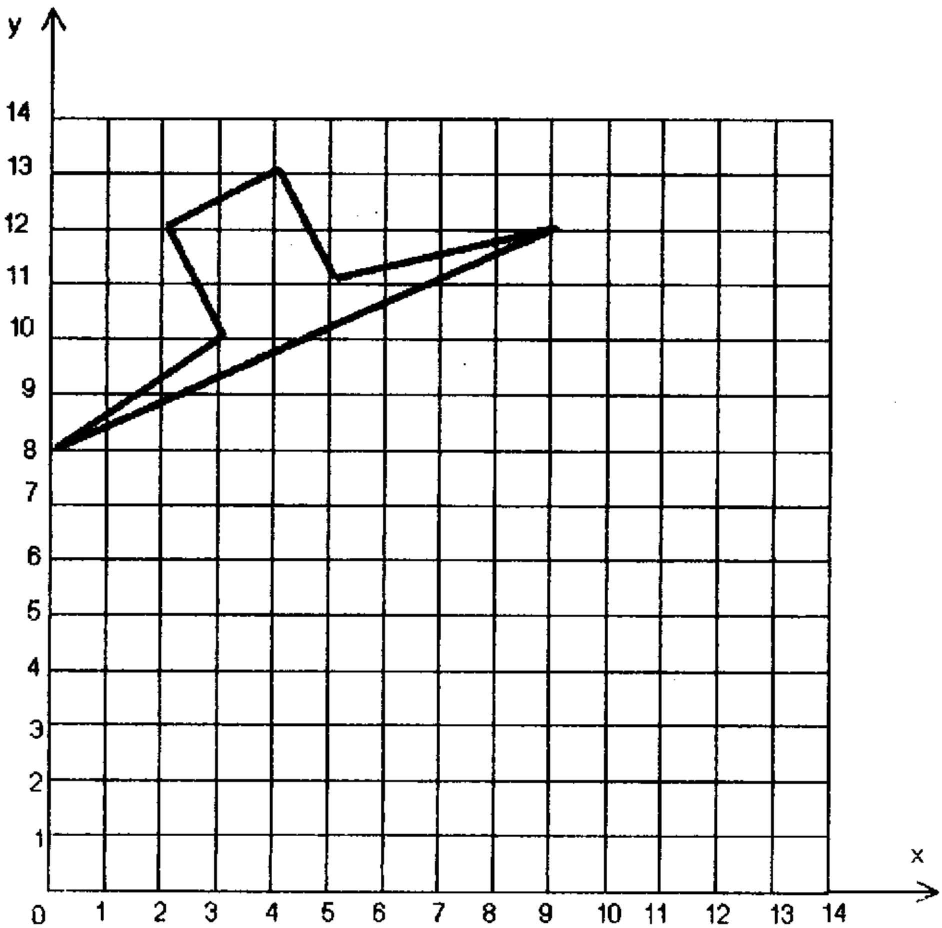
Estão escritos, logo abaixo, os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar o chapéu do Zorro, no quadriculado:

(0,8) - (9,12) - (5,11) - (4,13) - (2,12) - (3,10).

Escreva, embaixo de cada par, um novo par, obtido da seguinte maneira:

Põe o 1º número no lugar do 2º e o 2º no lugar do 1º. Procura sua posição no quadriculado e liga-os na parte em que estão escritos.

Liga, por fim, o último ao primeiro.



(Retirado de Bray et Clausard, **Les Jeux de Valérie et d'Olivier**, OCDL, Paris - 1969.

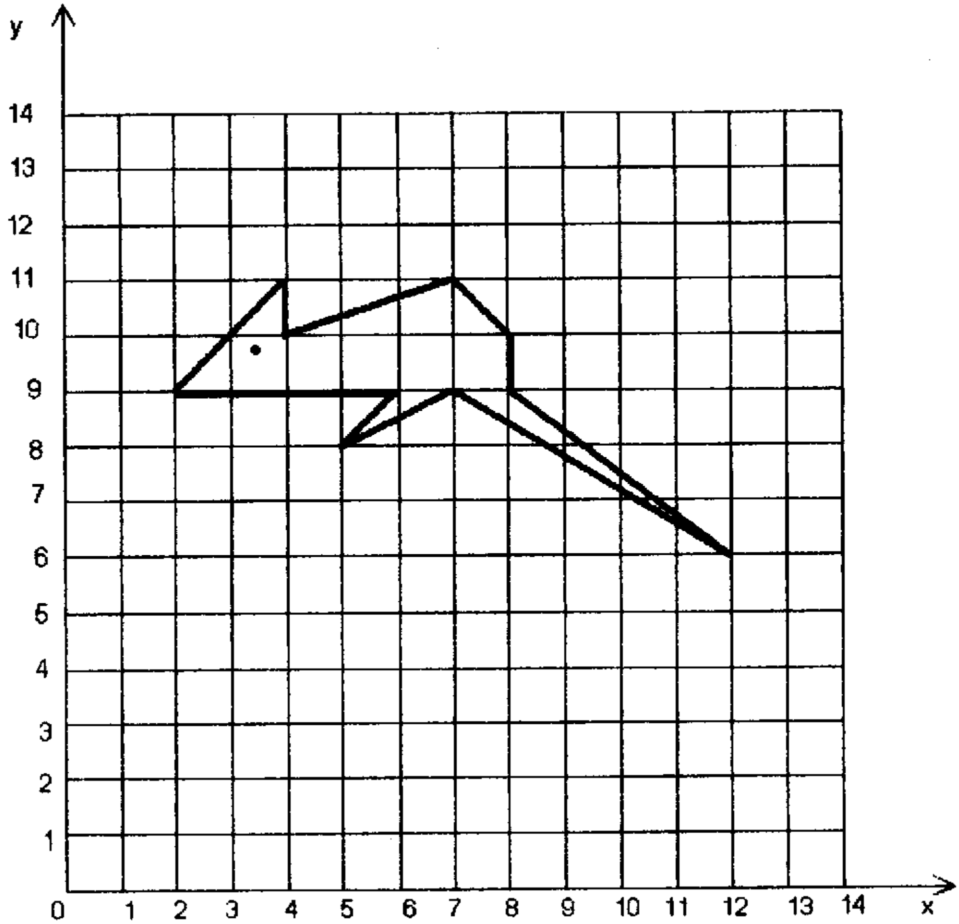
Ficha nº 4

Eis os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar este rato:

(2,9) - (4,11) - (4,10) - (7,11) - (8,10) - (8,9) - (12,6) - (7,9) - (5,8) - (6,9).

Escreve, sob cada par, um novo par, obtido da seguinte maneira:

Não troques o 1º número do par. Retira 4 do segundo nº de cada par, liga, em seguida, os novos pontos obtidos na ordem em que escreveste, depois une o último ao primeiro.



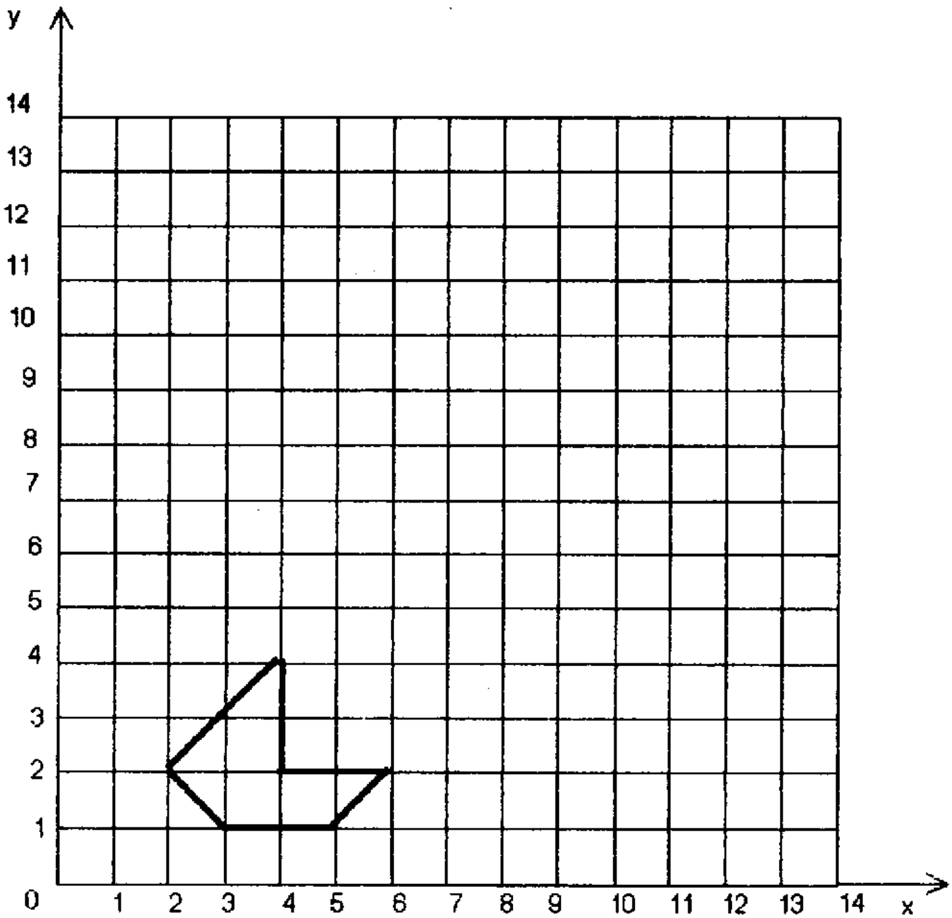
(Retirado de Bray et Clausard, Les Jeux de Valérie et d'Olivier, Paris - 1969).

Ficha nº 5

Eis os pares que correspondem aos pontos que permitiram desenhar o barquinho no quadriculado:

(3,1) - (4,1) - (5,1) - (6,2) - (4,2) - (4,4) - (2,2).

Escreve, embaixo de cada par, um novo par, da seguinte maneira: multiplica-se tanto o primeiro como o segundo número de cada par por 3. Encontra os pontos correspondentes no quadriculado e liga-os, como foi feito nas atividads anteriores.



(Retirado de Bray et Clausard, **Les Jeux de Valérie et d'Olivier**, Paris - 1969).

ATIVIDADE Nº 5

Objetivo: Complementar e reforçar os aspectos abordados na atividade anterior.

Material: Lápis e fichas de trabalho.

Tarefa: O professor entregará aos alunos o conjunto de fichas e formulará as seguintes questões:

1 - Pegue as três fichas e observe bem os desenhos que estão nelas: há sempre dois desenhos que estão na mesma ficha.

Responda às seguintes perguntas olhando para eles:

- em todas as 3 fichas os desenhos são do mesmo tamanho?
- em alguma das fichas as duas figuras podem ser consideradas como se olhando num espelho?

2 - Aqui estão os pares que codificam os pontos de uma das flores, na ficha nº 1:

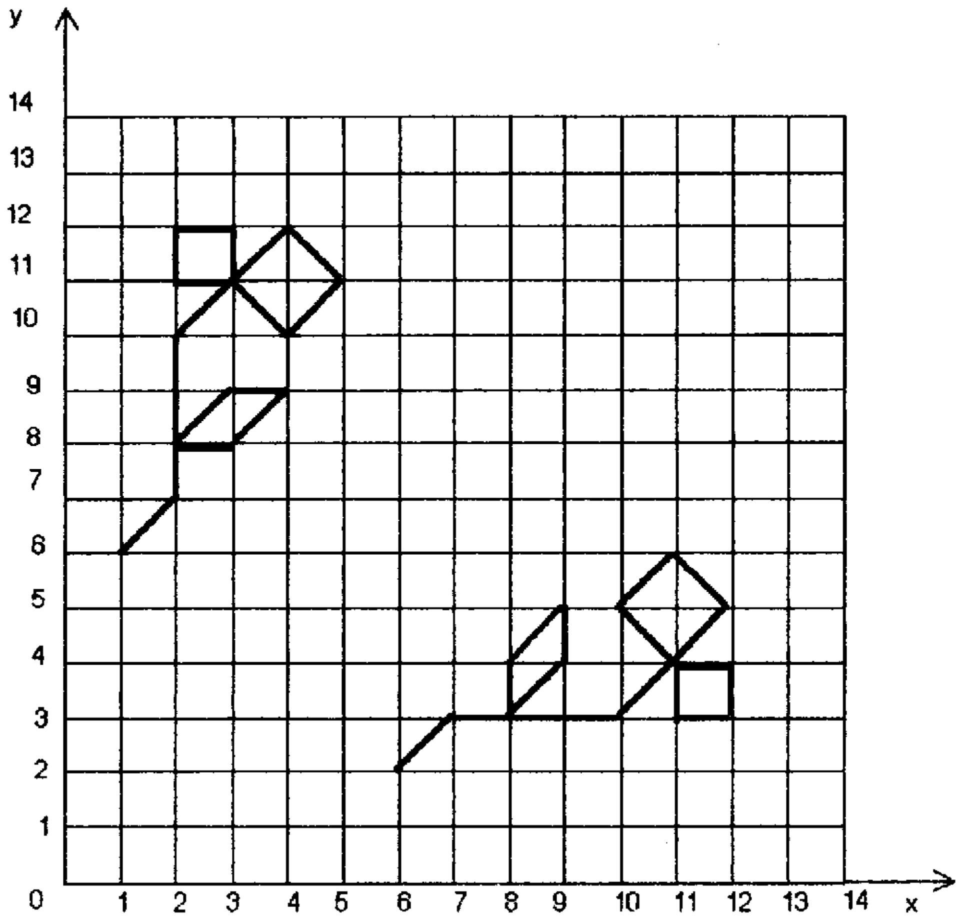
(2,6) - (3,7) - (3,8) - (5,9) - (4,9) - (3,3) - (3,9) - (3,10) - (4,11) - (5,10) - (6,11) - (5,12) - (4,12) - (3,12) - (3,11)

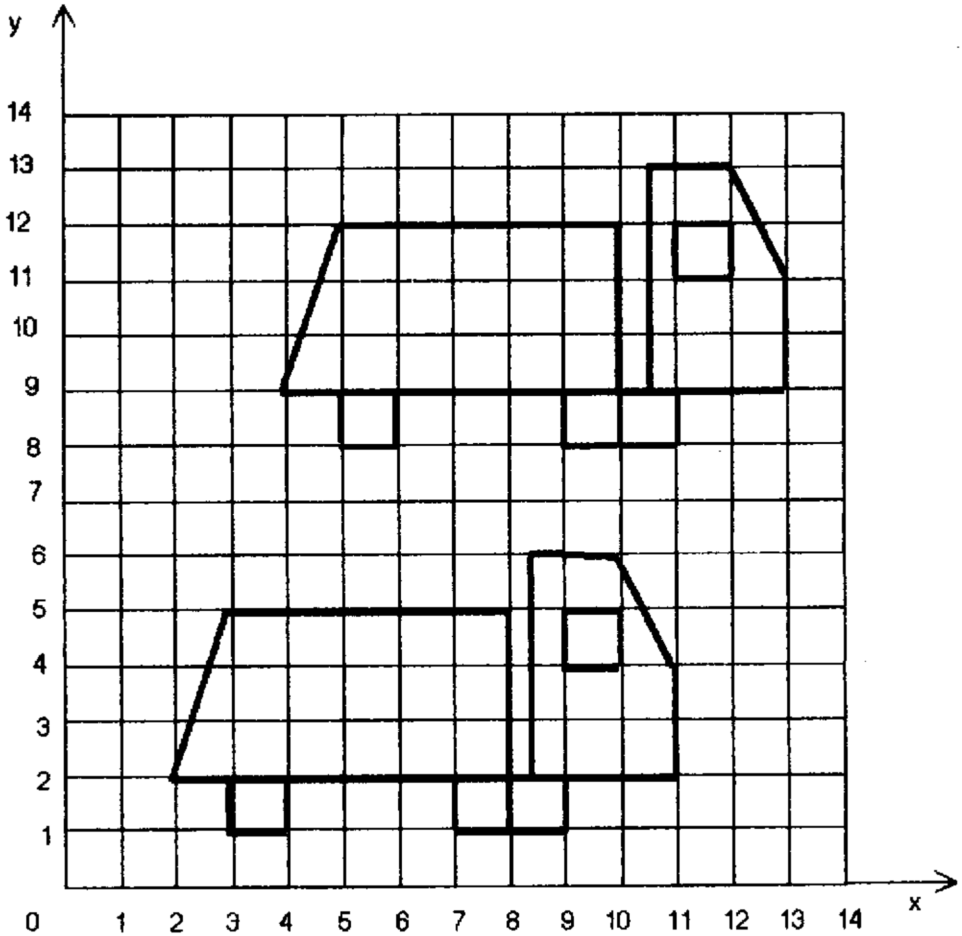
Procure os pontos correspondentes na outra figura e escreva os seus códigos abaixo dos que já estão escritos. Que modificações se realizam entre os pares de números dos pontos da primeira e da segunda flor? Faça o mesmo para a ficha do caminhão e da bandeira.

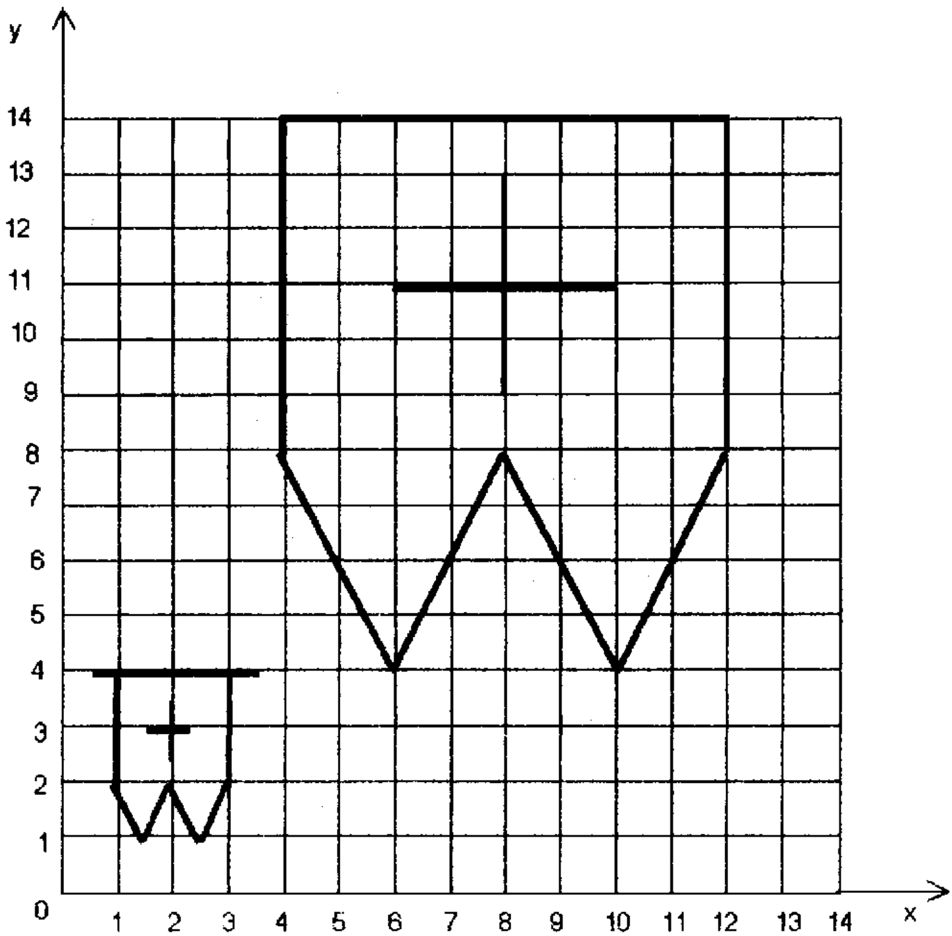
Ligue os pontos correspondentes das figuras em cada ficha e prolongue os segmentos de reta até as bordas da folha de papel.

Em alguma das fichas todos os segmentos de reta, unindo pontos correspondentes das duas figuras, passam pelo ponto (0;0)?

(Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF. Projeto de integração do Ensino de Matemática e Ciências no Currículo de 1º grau - 1976.)


y
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
x


y
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
x


y
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
x

ATIVIDADE Nº 6

Objetivos: a) Através do fenômeno: objeto vertical-sombra, deixar bem clara a noção de razão constante entre o comprimento de um bastão e a respectiva sombra, em um dado instante.

b) Verificar que o conjunto de pares ordenados, onde o primeiro elemento do par é o comprimento do bastão e o segundo elemento é a respectiva sombra, constitui uma função linear.

Material: Bastões com os seguintes tamanhos: 2m; 1,80m; 1,50m; 1,20m; 1m; 0,50m.

1ª Tarefa: Cada grupo deve medir a sombra de cada bastão colocado verticalmente no chão, anotando no seguinte quadro os dados pedidos:

Comprimento do bastão						
Comprimento da sombra correspondente						
Quociente entre bastão e sua sombra						

2ª Tarefa: Solicita-se aos alunos que observem bem o quadro e relatem as descobertas que fizeram.

- Os quocientes entre o comprimento de cada bastão e a sombra correspondente são iguais?

3ª Tarefa: Pede-se aos alunos que coloquem os dados do quadro acima num sistema de coordenadas cartesianas, de modo que os comprimentos dos bastões sejam representados no eixo dos "x" e as sombras no eixo do "y". Unam os pontos.

- É verdade que unindo os pontos obtém-se uma reta que passa pela origem?

- Há alguma relação entre esta atividade e as que fizemos anteriormente, nesta cidade?

(Retirado do MEC/PREMEN/UFRGS/DEF, Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Mataemática no Currículo de 1º Grau - 1976).

ATIVIDADE Nº 7

Objetivos: a) Coletando dados, através da medição de objetos com faces circulares, constatar que:

- a relação entre o comprimento da circunferência e a medida do respectivo diâmetro é constante;

- o conjunto dos pares ordenados da forma (comprimento da circunferência; medida do respectivo diâmetro), constitui uma função linear.

b) Verificar que na função linear, para dois pares quaisquer $(x; Y_1)$ e $(x_2; Y_2)$, vale a relação:

$x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$.

Material: Latas vazias, pilhas, cabos de vassoura, pedaços de barbante, papel quadriculado e régua.

1ª Tarefa: Meçam, em todos objetos, o diâmetro e o comprimento da circunferência das faces circulares. Anotem as medidas encontradas no quadro abaixo:

Objetos	M	N	O	P	Q
C = medida da circunferência					
D = medida do diâmetro					
Quociente entre C e D					

Comparem os resultados das divisões

2ª Tarefa: Representem utilizando papel quadriculado, num sistema cartesiano, os pontos dados pelos pares ordenados: medida da circunferência: diâmetro. Liguem os pontos e verifiquem se ficam em linha reta. Essa reta passa pelo ponto (0;0)?

- Há alguma relação desta atividade com outra que você fez?

3ª Tarefa: Verifique se é verdade que: $M_c/M_d = N_c/N_d$, onde

M_c - medida da circunferência do objeto M.

N_c - medida da circunferência do objeto N.

M_d - medida do diâmetro do objeto M.

N_d - medida do diâmetro do objeto N.

Verifiquem mais dois casos.

Avaliação: 1 - Dois alunos estavam fazendo medidas das circunferências e diâmetros de alguns objetos. Um deles encontrou um copo cuja circunferência media 6,28 cm e o diâmetro 2 cm.

Depois mediu uma lata, cuja medida do comprimento da circunferência era 7,85 cm. Ele esqueceu de anotar a medida do diâmetro. É possível descobrir essa medida, levando em conta as outras três?

2 - Um automóvel fez 400 Km em 5 horas. Quanto tempo necessitará, mantendo a mesma velocidade média, para fazer mais 320 Km?

(Retirado de MEC/SSPREMEN/UFRGS/DEF. Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo do 1º grau - 1976)

ATIVIDADE Nº 8

Objetivo: Representar funções, definidas por sentenças matemáticas, num sistema cartesiano, verificar a relação entre as coordenadas de pontos de uma reta que passa pela origem e apresentar contra-exemplos.

Material: Lápis, régua e papel quadriculado.

1ª Tarefa: Solicita-se aos alunos que tracem dois eixos de referência de um sistema cartesiano ortogonal.

Logo após, pede-se que procurem pontos dessa falha para os quais é verdade que y = x. Pede-se que escrevam na folha quadriculada a lista seguinte:

x	y
2	
-1,5	
-1	
0	
1	
1,5	
2	
3	

2ª Tarefa: Pede-se que tomem uma nova folha quadriculada e que assinalem o eixo dos "x" e o eixo dos "y". Do mesmo modo, pede-se que marquem os pontos para os quais x + y = 6. Dá-se, como exemplo, que o ponto A corresponde ao par (4;2), porque 4 + 2 = 6; sugere-se uma lista como a que segue, a qual se deve escrever num canto da folha quadriculada.

x	y
4	
1,5	
1	
-1	
-2	
-2.5	

3ª Tarefa: Pede-se para que representem os pontos para os quais é verdade que x.y = 18.

x	y
1	
2	
3	
4,5	
6	
9	

4ª Tarefa: Pede-se que representem a função 2.x = y. Isto é, que marquem os pontos para os quais é verdadeira a relação dada.

x	y
4	
1,5	
1	
0	
-1	
-2	
-2,5	
-3	

5ª Tarefa: Solicita-se que representem a função: x.y = y, utilizando uma folha de papel quadriculado.

6ª Tarefa: Solicita-se que os alunos representem a função: y = -3.x em outra folha de papel quadriculado.

7ª Tarefa: Pede-se aos alunos que espalhem sobre a carteira todos os gráficos que fizeram e respondam às seguintes perguntas:

- Dos conjuntos de pontos que você determinou, quais estão em linha reta?

- Como estão os demais?

- Quais deles passam pelo ponto (0;0)?

- Considere os conjuntos de pares dos números correspondentes a cada ponto nos gráficos; para quais deles é verdade que: $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$ (R)?

(Diremos aos alunos que quando se verifica a relação (R), costuma-se dizer que x_1 está para y_1 assim como x_2 está para y_2 e que se escreve assim: $x_1 / y_1 = x_2 / y_2$).

(Retirado de MEC/PREMEN/UFRGS/DEF. Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo do 1º grau - 1976)

ATIVIDADE Nº 9

Objetivo: Explorando o conceito de função linear, determinar a propriedade aditiva das proporções, expressa por:

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

1ª Tarefa: Encontra 10 valores para y, determinando, à sua escolha, valores para x, em cada uma das seguintes funções lineares:

$y = -1.5\,x$ $\quad y = 0.2\,x$ $\quad y = -2\,x$

2ª Tarefa: Observa atentamente as três listas de pares de números e responde, após fazer as operações necessárias:

- É verdade que a soma de quaisquer dois elementos da coluna x pode ser também um elemento desta coluna?

- A soma de dois elementos da coluna dos x corresponde à soma dos dois elementos correspondentes na coluna Y?

Por exemplo: na função $y = 1,5\ x$

1-------------1,5

3-------------4,5

(1+3)----------(1,5 + 4,5)

- É verdade que se x é 4, y é 6?

Verifique se isto é verdade para mais 5 casos em $y = 1,5\ x$.

- Considere a função $y = 0,2\ x$ e verifique se é verdade que:

$(x_1 + x_2)\ .\ 0,2 = y_1 + y_2$

$(x_3 + x_4)\ .\ 0,2 = y_3 + y_4$

$(x_2 + x_{11}).\ 0,2 = y_2 + y_{10}$

3ª Tarefa: Descobrir o que se pede: numa das 3 funções lineares acima, a soma de 2 elementos na coluna dos "y" é -10,8 e ela corresponde à soma de 2,25 e 3,15 na coluna dos "x". Quais são os "y" para 2,25 e 3,15, considerando a sua soma -10,8?

Avaliação: Como dividir Cr$ 180,00 entre os netos do Sr. Álvaro, proporcionalmente às suas idades? Um dos netos tem 5 anos, o outro 4 e o outro 6.

(Retirado do MEC/PREMEN/UFRGS/DEF, Projeto de Integração do Ensino de Ciências e Matemática no Currículo do 1º grau - 1976).

(Recebido para publicação em 08/08/88
e liberado em 07/90)