scientiæ studia, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 645-67, 2011

O "salto arquimediano": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático

José Carlos Cifuentes

RESUMO

Neste artigo introduzimos o conceito de "salto arquimediano" como um processo de argumentação não dedutiva em matemática que produz uma ruptura epistemológica na direção de dar objetividade a certos fatos matemáticos. Discute-se, também, o caráter qualitativo do salto arquimediano ressaltando sua função hermenêutica no pensamento matemático e sua relação com um conhecimento estético na matemática. São exemplos de rupturas epistemológicas produzidas por um salto arquimediano, dentre outros, os seguintes: (1) a propriedade arquimediana da reta real, que estrutura a reta euclidiana através do sistema de números reais; (2) o princípio de indução completa da teoria dos números naturais, que modela a nossa intuição sobre os processos recursivos; (3) a passagem do infinito potencial ao infinito atual, que permite dar conteúdo objetivo à teoria dos conjuntos infinitos e das cardinalidades.

Palavras-chave: Salto arquimediano. Propriedade arquimediana. Ruptura epistemológica. Mitos matemáticos. Estética da matemática.

A Luis Sánchez Domínguez
cuya amistad, cuando jóvenes,
me hizo descubrir el lado crítico de la ciencia.
In memoriam

1 Mitos matemáticos: a reta real e o salto arquimediano

Os mitos, na ciência, originam-se quando uma interpretação é transformada em verdade ou em explicação. Então, será possível que existam mitos na matemática, se ela é considerada por excelência a ciência da verdade e da certeza? Mitos na matemática, ou melhor, mitos matemáticos, não devem ser confundidos com mitos sobre a matemática ou metamatemáticos. Um dos mais importantes mitos sobre a matemática na atualidade, e que permeia inclusive o seu ensino, é considerar essa ciência como sendo de natureza extensional. É um pressuposto geralmente aceito desde finais do século xix que a matemática pode ser fundamentada, ou construída, integralmente na teoria dos conjuntos, sendo que a característica extensional dessas entidades é expressa pelo axioma de extensionalidade de Frege-Cantor. Essa, de fato, foi uma das propostas de finais do século xix e começos do seguinte para a reconstrução da matemática como consequência do processo de aritmetização da análise e subsequente crise dos fundamentos.

Outras propostas, como a teoria das categorias e funtores, foram desenvolvidas a partir de meados do século xx e ainda suas capacidades não foram esgotadas. Por outro lado, os aspectos intensionais da matemática, como, por exemplo, o conceito de "parte orgânica" de um conjunto, uma relação mais íntima entre a parte e o todo em um sentido mereológico (os subconjuntos usuais são também de caráter extensional e não intensional), ainda não foram explorados, embora a topologia e a teoria dos subconjuntos *fuzzy* tenham dado subsídios para uma abordagem nessa direção. A própria ideia de "função", tão central na matemática atual, carrega um aspecto dinâmico que sua versão conjuntista-extensional não captura. Aliás, essa característica dinâmica foi perdida, como observado por Javier de Lorenzo, na passagem da formulação da continuidade de uma função devida a Cauchy para as formulações atuais que usam o conceito de "limite". Vejamos:

> Cauchy enuncia que "uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente, convergindo para zero". Nessa linguagem dinâmica, as quantidades são grandezas que aumentam ou diminuem, com os valores numéricos associados convergindo, respectivamente, para infinito ou para zero (...) A formulação de Cauchy não tem, então, um sentido verdadeiramente preciso, e pode ser descartada em favor de conceitos de natureza mais aritmética, como o de majoração, de minoração ou de aproximação (Lorenzo, 2001, p. 10).

Essa passagem conceitual de uma geometria/física da continuidade para uma aritmética da continuidade, que constitui um dos componentes metodológicos do processo de aritmetização da análise, já é um pré-anúncio teórico da ruptura epistemológica que estabelece o fenômeno que chamaremos de "salto arquimediano".

Podemos apontar, então, como um primeiro mito matemático, como consequência desse mito metamatemático sobre o caráter extensional da matemática mencionado acima, o seguinte: as funções têm só características extensionais e podem ser reduzidas a sua definição conjuntista.

Outro dos grandes mitos sobre a matemática é sua condição de ser uma ciência exata, mas a exatidão em matemática não é necessária para a sua compreensão, de modo que são possíveis outras formas de acesso ao conhecimento matemático (cf. Cifuentes, 2009). Esse mito traduz-se na crença de que a matemática só diz respeito ao conhecimento necessário, característica que se consolidaria através da demonstração, e não lida, ou não deveria lidar, com "o suficiente". A intuição matemática teria a capacidade de apreender esta última característica, que exemplificaremos depois.

Em Cifuentes (cf. 2009, 2010), discutimos outros mitos sobre e na matemática no contexto do pensamento matemático qualitativo. Dentre os primeiros, cabe destacar ainda o seguinte, que, como veremos, estará por trás do caráter epistemológico do salto arquimediano, a saber, a matemática é epistemologicamente completa; com efeito, a completude é um dos grandes valores da matemática, defendido principalmente por Hilbert em finais do século xix. Ele tem o significado, dentre outros, de que todo problema matemático pode ser resolvido, o que pode ser traduzido como significando que na matemática não há impossibilidades epistemológicas. Outras interpretações dos resultados [de incompletude] de Gödel argumentam contrariamente.

Em Lavalle, também são discutidos alguns mitos metamatemáticos, especialmente aquele que diz respeito à condição de ser a matemática uma ciência puramente dedutiva, porém tomando o cuidado de colocar isso no terreno do discurso – "discurso matemático e discurso dedutivo coincidem" (Lavalle, 1977, p. 192) –, levando depois a discussão aos sistemas formais e textos formalizados.

É possível que os mitos matemáticos sejam fonte do que Bachelard chama de "obstáculos epistemológicos" (cf. Bachelard, 2003), pois aqueles, na sua condição de "verdades" matemáticas consolidadas, seriam obstáculos para o surgimento de outras verdades (interpretações) que as substituam. O conceito de "ruptura epistemológica" também foi introduzido por Bachelard (cf. 2000). Faz-se necessária uma análise mais aprofundada desses conceitos.

Os mitos matemáticos, então, são mitos no interior da própria matemática e fazem parte do conhecimento matemático sistematizado. O exemplo que motiva o assunto deste artigo, e que veremos na sequência, mostrará que certos resultados matemáticos (não metamatemáticos) de um pensamento qualitativo em matemática dependem geralmente de uma interpretação e são consequência de uma tomada de decisão. Talvez possamos concordar que atribuir "verdade" a hipóteses, axiomas ou princípios, que a matemática assume, é resultado de um ato de interpretação acerca de uma certa "realidade matemática".

Pois bem, um dos mitos matemáticos historicamente consolidados e de enormes consequências na matemática atual é o assumir que a estrutura da reta euclidiana é a do sistema dos números reais, tomando a sua completude métrica como fator de decisão (cf. Cifuentes, 2009).

Hoje, no estudo da análise matemática, identifica-se a "reta euclidiana", que é um objeto geométrico, com a "reta real", que é um objeto algébrico, pois nessa área do conhecimento matemático começa-se com o estudo do corpo ordenado dos números reais. A ordem envolvida estrutura linearmente esse sistema de números, estabelecendo-o geometricamente como uma reta. Para tal identificação, supõe-se a reta euclidiana constituída de pontos (entidades inextensas) e associa-se a cada número real um único ponto da reta de modo que essa associação é demonstrada ser completa, no sentido do que é biunívoca, isto é, de que a cada ponto da reta também lhe corresponde um único número real, sendo uma consequência dessa associação a crença de que todo segmento de reta é mensurável por um número real positivo. Dizemos, nesse caso, que a reta euclidiana tem a estrutura dos números reais. Podemos entender essa "estrutura" como uma roupagem algébrica e topológica que a reta veste para que suas propriedades geométricas sejam "inteligíveis" pela mente humana, assimiláveis pela intuição matemática.

Por outro lado, na história da matemática há diversos momentos em que a reta euclidiana revestiu-se de outra interpretação, envolvendo a noção de "infinitésimo". Destaca-se aqui o período inicial do cálculo infinitesimal no século XVII, cuja discussão teórica pode remontar às épocas de Zenão de Eléia (século V a.C.), Eudoxo de Cnido (século IV a.C.) e Arquimedes de Siracusa (século III a.C.).

No século XIX, após os desenvolvimentos de Cauchy, os números infinitesimais foram eliminados da matemática em decorrência do processo de rigorização dessa ciência chamado de "aritmetização da análise", fundando-se, então, a análise matemática na teoria dos números reais e constituindo o que se chama hoje de *análise clássica* ou *standard*.

Em meados do século XX, após diversos desenvolvimentos da lógica matemática, especialmente da teoria de modelos, os números infinitesimais foram reintroduzidos na matemática como parte estruturante do corpo ordenado dos chamados "números hiperreais", corpo que estende a reta dos números reais, supostamente completa, sobre o qual é construída a chamada *análise não-standard*. Afinal, qual é a estrutura da reta euclidiana, a dos números reais ou a dos números hiperreais ou alguma outra? E o que significa a completude da reta real nesse contexto?

Devemos ressaltar que a demonstração dessa completude topológica baseia-se em um princípio conhecido hoje como o *princípio de Arquimedes* ou a *propriedade arquimediana*, que abreviaremos por *PA*, que afirma, em termos geométricos, que dados dois segmentos distintos, existe sempre um múltiplo inteiro do menor que supera o maior. A natureza epistemológica desse princípio, cuja introdução e aceitação pela matemática será o nosso protótipo de "salto arquimediano", será analisada na seção 2.

Ele já é usado por Euclides nos *Elementos* (2009, Livro x, Proposição 1), para demonstrar, por exemplo, o chamado *princípio de Eudoxo* e cujo enunciado é o seguinte:

> sendo dadas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude dada (Euclides, 2009, p. 354).

Com efeito, a prova da Proposição 1 dada por Euclides começa assim:

> sejam as duas magnitudes AB, C desiguais, das quais a AB é maior; digo que, caso da AB seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, será deixada alguma magnitude que será menor do que a magnitude C. Pois, a C, sendo multiplicada, será, alguma vez, maior do que a AB. Fique [então] multiplicada e seja (p. 354).

Observa-se o uso explícito que Euclides faz do *PA*, apesar de que ele não o explicita, como apontado por González (cf. 1992, p. 26), como um princípio e apenas o dilui como parte de uma definição, a Definição v.4: "magnitudes são ditas ter uma razão entre si, quando multiplicadas podem exceder uma à outra" (Euclides, 2009, p. 205). Só posteriormente é elevado à categoria de princípio por Arquimedes.

Na geometria euclidiana plana, os princípios de Arquimedes e de Eudoxo são usados em inúmeras demonstrações, possibilitando contornar, principalmente, fenômenos de proporcionalidade de figuras geométricas incomensuráveis. Assim, por exemplo, a Proposição xii.2 dos *Elementos,* a qual diz "[as áreas d]os círculos estão entre si como [as áreas d]os quadrados sobre os diâmetros" (Euclides, 2009, p. 528), é demonstrada apelando a certos argumentos de "aproximação" que traduzem o princípio de Eudoxo em um método, o *método de exaustão*. O princípio de Eudoxo captura o conceito intuitivo de "tão pequeno quanto se queira" que no fundo visa dar conteúdo, ou atribuir um sentido, a processos infinitos através de aproximações finitas, e o método de exaustão transforma esse princípio em um método de argumentação. É fácil ver que os argumentos de suficiência são usados nos processos de aproximação permitidos pelos princípios de Arquimedes e de Eudoxo. O método de exaustão será analisado com mais detalhe na seção 3.

A condição de princípio ou de axioma do *PA* é recorrente na história da matemática. Assim, na formulação axiomática da geometria dada por Hilbert (2003) no seu *Fundamentos da geometria* de 1899, ele aparece como o axioma v.1, dentre os axiomas de continuidade, cujo enunciado, usando os conceitos próprios desse sistema, é o seguinte:

> (Axioma da medida ou axioma de Arquimedes) Se AB e CD são dois segmentos quaisquer, então há na reta AB um número finito de pontos A_1, A_2,..., A_n tais que os segmentos AA_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}A_n$ são congruentes com o segmento CD e B está entre A e A_n (Hilbert, 2003, p. 28)

Chamar de "axioma da medida" esse princípio já revela o fato de que ele torna aritmético um fenômeno geométrico, e mantê-lo como princípio em uma versão moderna da geometria, apesar do formalismo hilbertiano, talvez revele a impossibilidade de encontrar uma justificativa melhor, isto é, princípios mais elementares nos quais sustentá-lo.

O nosso primeiro salto arquimediano é, então, a adoção do *PA* como princípio estruturante da reta euclidiana, daí o nome adotado por nós. Repare-se que o chamado salto arquimediano não é o *PA*, mas o ato de assumi-lo como princípio, o ato de atribuir-lhe verdade na matemática. Essa adoção foi, para a matemática, um ato de interpretação a respeito da estrutura da reta, e sua aceitação como "verdade" uma escolha dessa ciência para tornar lógico um fenômeno de aproximação intuitiva; escolha que pode significar uma limitação da mente humana para "perceber", para "experienciar", mesmo que teoricamente, variações mais finas do que as permitidas pelos números reais. De fato, os números hiperreais permitiriam medir essas variações mais finas, "mais" segmentos da reta poderiam ser medidos com esses números. Na atualidade, alguns fenômenos físicos ligados, por exemplo, a problemas estocásticos, como o movimento browniano, admitem uma explicação razoável no contexto da análise não-*standard*.

Podemos considerar, então, o salto arquimediano como um processo no pensamento matemático que promove uma ruptura epistemológica na direção do ontológico (processo que pode ser fonte de novos mitos matemáticos), tornando "reais" para a matemática, isto é, atribuindo verdade ou existência a certos objetos ou fatos sugeridos pela intuição, mesmo que falível, na medida em que essa atribuição permite ordenar um certo contexto teórico ou estruturar, se quisermos ser platonistas, uma certa "realidade".

Os processos de salto arquimediano são atos (ações humanas) de decisão que, por tal motivo, explicitam seu caráter qualitativo, há um grau de subjetividade neles que pretende atribuir uma certa objetividade. Na seção 4 daremos argumentos para colocar os processos de salto arquimediano como parte de um conhecimento estético no interior da matemática.

Está implícito na discussão anterior que fenômenos relacionados com o infinito são subjacentes a quase todos os processos que qualificamos como saltos arquimedianos. Outros exemplos, que analisaremos nas seções posteriores, são os seguintes:

(a) o salto do complexo ao simples: o recurso estético da simplicidade;
(b) o salto do finito ao infinito: o princípio de indução completa;
(c) o salto do infinito potencial ao infinito atual;
(d) a atribuição de existência a certos construtos: o caso dos cardinais inacessíveis.

2 A propriedade arquimediana da reta real e seu significado epistemológico

A propriedade arquimediana ou princípio de Arquimedes, *PA*, é ingrediente fundamental, como já mencionado, na construção da chamada "reta real". Ele é formulado, em termos numéricos, da seguinte maneira:

(a) dados os números reais a e b com $0 < a < b$, existe algum inteiro positivo n tal que $na > b$.

A natureza desse princípio pode ser compreendida, ou melhor, a intuição sobre esse princípio pode ser adquirida, apelando a diversos de seus equivalentes que listamos na sequência:

(b) se a é um número real positivo, existe pelo menos um número racional r tal que $0 < r < a$;

(c) se a é um número real tal que $0 \leq a < r$ para todo número racional positivo r, então, $a = 0$;

(d) se a e b são números reais tais que $r < a < s$ e $r < b < s$ para quaisquer racionais r e s, então, $a = b$;

(e) a sequência $1/n$ (onde n é um inteiro) tende a zero para n tendendo a ∞;

(f) o princípio de Eudoxo.

O *PA*, especialmente na versão (e), tem diversas consequências tanto aritméticas quanto geométricas. Dentre as consequências aritméticas podemos citar as seguintes. Ele está na base da demonstração de que $0{,}999... = 1$ ou, em forma mais geral, da demonstração de que se $\{r_n\}$ é uma progressão geométrica de números reais positivos de razão d, com $0 < d < 1$, isto é, $r_n = r_0 d^n$ para $n \geq 0$, então, a soma dos infinitos termos da progressão é dada por $S = r_0/(1 - d)$.

Mais ainda, o *PA* justifica o fato de que se $s = a,d_1d_2d_3...d_n...$ é um número real na sua expressão decimal (podemos supor $a \geq 0$) e $\{r_n\}$ é a sequência de números racionais formada por $r_0 = a$; $r_1 = a,d_1$; $r_2 = a,d_1d_2$; ... $r_n = a,d_1d_2d_3...d_n$; etc., então $s = lim\ r_n$, isto é, todo número real é o limite da sequência de racionais constituída pelas suas expressões decimais truncadas. Na realidade, o *PA* sustenta grande parte da teoria da convergência de sequências e séries e cria possibilidades para as propostas de construção do sistema de números reais a partir dos racionais através das sequências de Cauchy ou dos "cortes" de Dedekind.

Do ponto de vista intuitivo, a versão (e) do *PA* reflete a ideia de que a sequência $\{1/n\}$, pensada como uma coleção discreta de pontos da reta, pode "pular" para zero no infinito.

Também, a igualdade 0,999... = 1 ilustra o caráter aproximativo que o *PA* promove para a nossa intuição. Na realidade, como veremos na seção 3, essa é uma falsa igualdade que o método de exaustão força a ser uma identidade.

Dentre as consequências geométricas desse princípio podemos citar a seguinte. Ele é usado, por exemplo, para "aproximar tanto quanto se quiser" o círculo a uma sequência infinita de polígonos inscritos e/ou circunscritos (os quais podemos considerar regulares). Do ponto de vista da intuição geométrica, o *PA* força entender o círculo como o limite de uma sequência de polígonos inscritos e/ou circunscritos, isto é, transforma, usando termos aristotélicos, o fenômeno em potência da aproximação das áreas dos polígonos à do círculo no fato de identificá-las em ato no limite. Essa suposta aproximação permitiria concluir que qualquer diferença de áreas (ou de comprimentos) entre o círculo (ou, correspondentemente, a circunferência) e os polígonos tende a zero e, portanto, que a área do círculo ou o comprimento da circunferência é o limite das áreas ou dos comprimentos dos polígonos respectivamente. Trata-se dum salto epistemológico – o salto arquimediano – que só o princípio de Arquimedes pode "explicar".

A intuição gerada pelo princípio de Arquimedes para essa suposta aproximação pode ser enganadora para a geometria do fenômeno em vários aspectos. Um exemplo que ilustra essa possibilidade é o seguinte. Consideremos um segmento de comprimento 1 e seja ele dividido em n partes iguais. Sobre cada segmento da subdivisão, de comprimento $1/n$, podemos construir diversas curvas unindo os respectivos extremos, por exemplo, um triângulo equilátero de lado $1/n$ em cada um deles, uma semicircunferência de diâmetro $1/n$, ou um triângulo isósceles reto no vértice oposto ao segmento, formando assim uma curva (eventualmente uma poligonal) que, quando n tende para ∞, tende pontualmente para o segmento original. Em cada estágio da aproximação, há elementos geométricos que variam como, por exemplo, o comprimento da curva e a área entre ela e o segmento original. Podemos verificar, nos três casos, que o cálculo do limite dos comprimentos não precisa usar o princípio de Arquimedes e dá como resultado valores diferentes ao do comprimento do segmento (que é 1): 2 no primeiro caso, $\pi/2$ no segundo e $\sqrt{2}$ no terceiro; porém, o cálculo do limite das áreas precisa usá-lo e dá como resultado zero em todos os casos, o que pode levar-nos a pensar que esse princípio capturaria a intuição devido à aproximação pontual das curvas ao segmento, quando o que acontece é o contrário, isto é, a aplicação do *PA* cria a intuição sobre esse fenômeno forçando-a a aceitá-lo como uma verdade.

Arquimedes, usando o princípio de Eudoxo, obteve aproximações da área do círculo comparando-a com a área de polígonos regulares inscritos e circunscritos de um número suficientemente grande de lados, o que lhe permitiu obter valores aproximados de p, por exemplo: $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$ que, em números decimais é $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$. Mas, devemos ter cuidado em concluir, com ele, que p coincide com sua expressão decimal infinita, o que seria um sofisma, pois, como vimos, essa identificação supõe o *PA*, especialmente na versão (d), versão que estará também na base do método de exaustão.

O pensamento arquimediano também tem reflexos na física clássica na conceituação, por exemplo, do *ponto material*. Um ponto material de massa m é o limite de uma esfera de massa m e de raio r (número real positivo) quando r tende para zero. É claro, então, que pensar um ponto como limite de uma esfera de raio decrescente é um salto arquimediano.

3 O método de exaustão e seu significado lógico

O método de exaustão deve ser diferenciado do princípio de Eudoxo (às vezes também chamado de "princípio de exaustão") enunciado na seção 1. Aquele já está implícito nos *Elementos* de Euclides na Definição v.2 e é o ponto de partida da chamada "teoria das proporções" de Eudoxo.

> Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (Euclides, 2009, p. 205).

Cabe traduzir essa definição em termos mais modernos. Para isso devemos reparar primeiro em que a expressão "múltiplos da" deve ser entendida como "múltiplos inteiros da".

> Dadas as magnitudes AB, CD, $A'B'$, $C'D'$, diremos que a razão de AB para CD é a mesma que a de $A'B'$ para $C'D'$, o que escreveremos por $AB/CD \approx A'B'/C'D'$, se cada vez que $mCD < nAB$ e $kCD > lAB$ ou $pCD = qAB$ temos que $mC'D' < nA'B'$ e $kC'D' > lA'B'$ ou $pC'D' = qA'B'$ respectivamente, onde m, n, k, l, p e q são inteiros positivos.

Em termos de proporcionalidade numérica, se chamamos de $a = AB/CD$, $b = A'B'/C'D'$, $r = m/n$, $s = k/l$ e $t = p/q$, temos que $a \approx b$ se cada vez que $r < a < s$ ou $a = t$ temos que também $r < b < s$ ou $b = t$ respectivamente. Observe-se que estamos usando propositalmente o símbolo $\approx$ ao invés da igualdade $=$, pois a relação definida acima é apenas uma relação de equivalência. Essa relação permite, a Eudoxo, lidar tanto com as situações comensuráveis quanto com as incomensuráveis. Eudoxo dá um salto epistemológico decretando a igualdade de proporções através dessa equivalência, o que transforma uma aproximação em uma igualdade, dando conteúdo matemático à expressão "aproxima-se tanto quanto se quiser".

O método de exaustão é o uso dessa relação de equivalência para "provar com rigor" a igualdade de certas proporções. Esse método é usado, por exemplo, na prova da Proposição XII.2 dos *Elementos* de Euclides já mencionada na seção 1, assim como também no caso não comensurável do teorema de Tales sobre a proporcionalidade de segmentos entre retas paralelas. Segundo Grimberg,

> o raciocínio é baseado em dois princípios: encontrar um algoritmo de aproximação, o que implica a ideia de uma série infinita [em potência] de etapas que podemos cumprir; o segundo princípio é o raciocínio indireto para chegar à igualdade. Assim, o raciocínio indireto permite que uma série infinita de desigualdades torne-se uma igualdade (2007, p. 67),

diríamos, quase como resultado de uma indução completa.

Concretamente, para provar $A = B$, onde A e B são grandezas ou magnitudes geométricas como comprimentos, áreas etc., supõe-se $A < B$ e $A > B$ e aplica-se sucessivamente o princípio de Eudoxo a essas desigualdades até chegar a uma dupla contradição, o que eliminaria ambas as possibilidades (cf. sobre o método de exaustão, Bongiovanni, 2005).

Devemos ressaltar que o método de exaustão é um procedimento argumentativo por redução ao absurdo e que usa o princípio de Eudoxo devido à própria natureza do ponto de partida, as desigualdades de magnitudes. A existência de magnitudes incomensuráveis, como a irracionalidade da Ö2, também é demonstrada por redução ao absurdo nos *Elementos* de Euclides. Essa condição impede o uso heurístico do princípio de Eudoxo, pois, seguindo González "esse método obriga a conhecer previamente o resultado a ser demonstrado, isto é, carece de valor heurístico, não serve para encontrar novas verdades, mas apenas para demonstrar aquelas das quais já se tem um conhecimento prévio" (1992, p. 28).

O método de exaustão permitia ao pensamento grego eliminar o infinito da matemática e aí, acreditamos, está a raiz epistemológica do salto arquimediano, transformar o aproximado em exato, o que, em termos aristotélicos, significa transformar potências em atos.

A aplicação do *PA* ou do princípio de Eudoxo ao método de exaustão pode ser ainda interpretada como um recurso de simplicidade nos procedimentos de argumentação matemática, o que nos conduz à próxima seção.

4 O princípio da simplicidade na constituição do conhecimento matemático

A razão e a intuição permeiam o pensamento matemático. A racionalidade matemática envolve tanto lógica e linguagem, quanto intuição, imaginação e sensibilidade, estas últimas intimamente ligadas à experiência estética.

A lógica lida com relações funcionais, regras, enquanto que a intuição trabalha com relações estruturais, padrões. Elas complementam-se no processo da cognição. Em particular, a intuição permite "ver" a forma do objeto estudado, e o estudo da "forma" é uma dos assuntos, dentre outros, comuns à arte e à matemática, o que permitiria uma interação entre ambas as formas de conhecimento.

Do ponto de vista lógico, a matemática tem como objeto o necessário e o universal, enquanto que do ponto de vista da intuição e da sensibilidade, a matemática pode lidar com a imprecisão e a incerteza e bastaria-lhe, como objeto, o suficiente e o particular, um particular com características especiais, por exemplo, de universalidade. Um exemplo ilustra esse fato. É suficiente um certo número finito de termos de uma sequência para "ver" intuitivamente sua regra de formação ou seu limite, cada termo da sequência é um particular, mas a passagem de um termo a outro permite ver a generalidade escondida. O suficiente, devidamente objetivado, delimitaria o que deveríamos entender por "aproximado".

Objetos matemáticos com grande conteúdo estético são as sequências (finitas ou infinitas). Esse conteúdo estético manifesta-se, ou revela-se, porque elas, por estarem constituídas de objetos múltiplos e em uma ordem determinada, sugerem uma "narrativa", sua condição de "sequencialidade" ou "serialidade". As sequências contam uma história, um processo, sugerem uma gênese, uma aproximação.

Na arte, a serialidade manifesta-se quando o artista cria uma *série* sobre o "mesmo" tema. Na realidade, nunca é o mesmo. Uma das séries mais famosas na história da arte é a da Catedral de Rouen de Monet. A criação de uma série pode ser interpretada como a procura do conhecimento de um objeto, conhecimento que só poderia ser atingido no limite infindável da prolongação dessa série. Toda sequência finita, considerada como fragmento inicial de uma possível sequência infinita, é só uma aproximação a esse conhecimento.

Devemos apressar-nos em dizer que o estético não é apenas um olhar sobre a matemática, acreditamos que existe um conteúdo estético no interior da própria matemática (cf. Cifuentes, 2005), estando esse conteúdo ligado ao construtivo, processual, fenomênico, ao que pode ser "apercebido" pelo intelecto através da capacidade de síntese da intuição. Devemos destacar, dentre os aspectos estéticos da matemática, a perfeição, a simetria, o contexto, o contraste, a ordem, a simplicidade e a abstração, e também a liberdade. Para Cantor, um dos criadores da teoria dos conjuntos, mais especificamente, da teoria conjuntista do infinito matemático, a essência da matemática reside na sua liberdade, uma característica romântica dessa ciência, a qual se manifesta na sua possibilidade de escolha, de interpretação, características qualitativas do conhecimento matemático como já vimos. Dentre os aspectos estéticos da matemática ressaltaremos, como ingredientes importantes para sua compreensão, o contexto e a simplicidade.

A contextualização dos objetos matemáticos é um fator importante nos processos ligados a sua apreensão pela intuição. Contextualizar um objeto é dar um referencial espaço-temporal, não necessariamente em um sentido físico, de modo que, do ponto de vista estético, o contexto passa a formar parte, como resultado de uma síntese, do próprio objeto (cf. Cifuentes, 2005). Por exemplo, uma forma de contextualizar uma sequência num contexto espaço-temporal é através de uma representação geométrica que permite evidenciar ou visualizar suas simetrias e seu padrão ou "moldura".

A geometria grega oferece essa componente estética em diversos momentos e ela é explicitada cedo pelos pitagóricos no estudo das propriedades dos números inteiros por meios geométricos. Na concepção pitagórica, o número não tinha um caráter abstrato, ele era a representação de uma extensão geométrica (comprimento, área etc.). Os pitagóricos classificavam os números inteiros de acordo com as figuras ou configurações que podiam ser formadas com eles, os chamados "números poligonais", assim temos os números triangulares 1, 3, 6, 10,..., os números quadrados 1, 4, 9, 16,..., os pentagonais 1, 5, 12,... etc.

Através dessa representação espacial (e também temporal, pois a sequencialidade sugere o tempo) é possível perceber o "todo maior" da sequência, o geral no particular, que a *Gestalt*, como teoria da organização perceptiva, explica, tornando possível conjeturar sua lei de formação e predizer, ou melhor, prever, sua continuação ou seu limite.

Assim, por exemplo, a sequência 1, 4, 9, 16,... é constituída pelos chamados números quadrados ou quadrados perfeitos (denominação que ainda preservamos) dos primeiros inteiros positivos. É através da representação geométrica desses números que é possível encontrar, intuir, algumas leis que governam a sequência. Por exemplo, no caso dos números quadrados, podemos perceber que cada um deles é a soma dos números ímpares consecutivos começando em 1, isto é, 1 ou 1 + 3 ou 1 + 3 + 5 ou 1 + 3 + 5 + 7 etc., o que pode ser verificado pela sua configuração espacial. Ou também que é soma de dois números triangulares consecutivos: 1, 1 + 3, 3 + 6, 6 + 10 etc. Também é possível "prever" o próximo termo da sequência, 25, processo que envolve uma outra característica estética da matemática como é o recurso à simplicidade, que apela a nossa capacidade de escolha. O "próximo termo da sequência", dentre as múltiplas possibilidades, é aquele cuja escolha é a mais simples dentro de um certo conjunto de dados contidos nos termos anteriores da sequência.

O caráter estético da simplicidade é explicitado por Diderot no século xviii. "Tudo o que é comum é simples, porém nem tudo o que é simples é comum. A simplicidade é uma das características da beleza, ela é essencial ao sublime" (Diderot, 1973, p. 178). A simplicidade não deve ser confundida, então, com o breve, o fácil, o comum. Indo ao encontro do pensamento de Descartes, para quem são operações do entendimento (ou da razão) a dedução e a intuição, e são elas as que conduzem à verdade, podemos concluir, interpretando-o, que um dos requisitos para algo ser apreendido pela intuição é sua "simplicidade", sendo isso o que garante clareza e distinção. Nelson Goodman (cf. 1975) sugere, através de uma abordagem lógica, que as leis científicas, quando expressas matematicamente, são o resultado da aplicação de um argumento de simplicidade, exemplificando esse fato mediante a curva de ajuste de um fenômeno que, construída a partir de uma série discreta de dados, resulta ser a curva mais simples que se ajusta a esses dados. Assim, tanto do ponto de vista lógico quanto do epistemológico, a simplicidade está na base da possibilidade de predição. O próprio estabelecimento da "conclusão" de um raciocínio indutivo (não dedutivo) ou de um raciocínio por analogia pode ser considerado um fenômeno de predição e, portanto, regido pelas leis da simplicidade.

O método axiomático, desenvolvido pelos gregos, é um procedimento que visa sistematizar um corpo de conhecimentos e faz uso explícito, em diversos momentos, do recurso estético da simplicidade, especialmente na sua estruturação, pois fundamenta o complexo, os teoremas, no simples, os axiomas. É possível que o próprio processo de dedução siga, a cada passo, o recurso da escolha da conclusão mais simples, onde o lógico por trás da dedução seria o encadeamento adequado desses passos.

A simplicidade também é tratada por Popper. Esse autor parte da pergunta "que resta – se resta algo – depois que eliminamos as ideias estética e pragmática da simplicidade? Há um conceito de simplicidade que se revista de importância para o lógico?"

(Popper, 1993, p. 149), e acrescenta, "ele [o conceito de simplicidade] deve proporcionar a medida do grau em que os acontecimentos apresentam regularidade ou caráter legiforme" (p. 150). Ainda, do ponto de vista epistemológico, "todas as questões epistemológicas que se colocam em conexão com o conceito de simplicidade podem ser respondidas, se igualarmos esse conceito ao de *grau de falseabilidade*" (p.153).

A simplicidade na ciência, assim como na matemática, é amplamente discutida por Lamouche, que a coloca na categoria de princípio. Para esse autor, são características da simplicidade na compreensão dos fenômenos naturais, dentre outras, a capacidade de unificação e agregação (cf. Lamouche, 1954, p. 34). Na matemática, são noções simples em um sentido cartesiano, isto é, nas suas características de clareza e distinção, por exemplo, a quantidade e a unidade (cf. p. 38). Também os conceitos de "economia de esforço" e de "economia de pensamento" são manifestações do princípio de simplicidade (p. 44).

Para Lamouche, a simplicidade adota também uma forma ativa: o mecanismo de simplificação. Assim, por exemplo, a multiplicação é uma simplificação operatória da adição, como a adição o é da numeração (cf. Lamouche, 1954, p. 44). E sugere que os processos de definição por analogia seguem um mecanismo de simplificação conceitual, novas operações aparecem por esse mecanismo. Assim, por exemplo, a operação de potenciação está para a multiplicação assim como a multiplicação está para a adição (cf. p. 50) etc.

Baseados na característica de simplicidade da matemática, aventamos a ideia de que a própria aplicabilidade da ciência matemática deve-se a sua capacidade de capturar o simples. Ao que parece, o próprio universo procura caminhos simples de constituição e desenvolvimento. Quase são sinônimas, desde Descartes e Galileu, as seguintes afirmações: "o universo comporta-se com simplicidade" e "o universo comporta-se matematicamente".

Uma das contribuições mais interessantes para a delimitação de uma estética da matemática, e também de uma análise estética da história da matemática, foi dada por François Le Lionnais (cf. 1965), quem, usando categorias culturais da história da arte como classicismo e romantismo, esboça uma classificação dos fatos e dos métodos matemáticos. O classicismo caracteriza-se fundamentalmente pela elegância e a ordem, enquanto que o romantismo pela loucura e o caos. A beleza clássica, em um ímpeto de simplicidade, unifica mostrando conexões inesperadas, enquanto que a beleza romântica desperta emoções violentas, fazendo mudar de rumo às vezes nossa intuição. São resultados de uma beleza clássica, por exemplo, os seguintes:

(1) na geometria plana, o fato de que as três alturas (ou as três mediatrizes ou as três medianas) de um triângulo sejam concorrentes;
(2) no cálculo diferencial e integral, o chamado *teorema fundamental do cálculo* que mostra que a tangente a uma curva e sua área são conceitos inversos um do outro.

São resultados de uma beleza romântica os seguintes:

(1) a teoria do infinito de Cantor, a qual derroga um dos princípios fundamentais da matemática grega, a saber, de que o todo é maior que a parte;
(2) as propriedades caóticas dos fractais que modificam princípios de regularidade e simetria.

O método de demonstração por indução completa é um método de beleza clássica: de um salto pode-se alcançar o infinito (cf. Lionnais, 1965, p. 477), também o é o método de descoberta por analogia, pois essa modalidade de argumentação permite iluminar vários campos simultaneamente através de suas semelhanças e diferenças. O método de demonstração por absurdo é um método de beleza romântica, assim também o são os métodos de obtenção de soluções de equações diferenciais que, em palavras de Le Lionnais, permitem "a transformação de uma crisálida em borboleta" (Lionnais, 1965, p. 472).

Como vimos na seção 3, o procedimento de exaustão ideado por Eudoxo e aplicado posteriormente por Arquimedes é a utilização explícita de um recurso de simplicidade adotado para evitar conflitos com a intuição do infinito. Esse procedimento, como todo fenômeno que envolve o salto arquimediano, é uma situação de beleza romântica pois envolve tanto o infinito, cantoriano ou não, quanto o método de demonstração pelo absurdo, mas também o é de beleza clássica na medida em que permite um certo ordenamento na nossa intuição.

Um dos conceitos que se mostrou basilar, então, para uma discussão estética da matemática é o do "infinito", a tal ponto que, para David Hilbert, a análise matemática nada mais é que uma *sinfonia sobre o tema do infinito*, e para Hermann Weyl, a matemática toda é *a ciência do infinito*. Para Kant, mais ainda, *o infinito é o nexo entre a matemática e a estética*, é a ponte entre o conhecimento científico e o conhecimento estético da matemática.

Terminaremos esta seção analisando o princípio de indução completa, ou simplesmente princípio de indução, como consequência de um salto arquimediano no contexto da aritmética.

O "princípio de indução" foi formulado explicitamente em 1889 pelo matemático italiano Giuseppe Peano como parte de seu sistema axiomático para a teoria dos números naturais. A discussão dele como um princípio da matemática remonta pelo menos a Pascal no século XVII. O axioma de indução de Peano é geralmente expresso da seguinte maneira:

Se A é um subconjunto do conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$ (= {1, 2, 3, ...}) tal que:

(a) $1 \in A$; e
(b) para todo n, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,
então $A = \mathbf{N}$.

Ele tem também vários equivalentes dentre os quais podemos mencionar:

(1) Se $P(n)$ é uma propriedade sobre números naturais tal que:
(a) $P(1)$; e
(b) para todo n, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$;
então, para todo n, $P(n)$.

(2) Para todo número natural n (isto é, para todo elemento de $\mathbf{N}$), existe um número $m \geq 1$ tal que $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ (m vezes).

A primeira formulação dá embasamento para o raciocínio por recorrência. A segunda, aparentemente intuitiva, apresenta uma complexidade escondida que só a análise lógica permite revelar. Com efeito, (2) parece implicar que $m = n$, porém esses dois números têm estatutos diferentes, um linguístico e o outro metalinguístico, o que o torna tão complexo quanto o princípio de indução. Ele expressa que todo número natural pode ser atingido por uma soma finita de 1's, porém, a ideia de "número natural" depende do sistema axiomático considerado e, portanto, sua intuição não é imediata. A possibilidade de haver números naturais hiperfinitos em um modelo não-*standard* da aritmética (restringindo evidentemente o princípio de indução a uma linguagem de 1ª ordem) mostra quão anti-intuitiva resulta essa versão do princípio de indução. Devemos observar que a própria definição de *máquina de Turing* apoia-se em (2) quando decreta que todo número natural pode ser determinado por um número finito de passos sequenciais na fita da máquina. A complexidade aludida do princípio de indução é analisada por vários autores e de vários pontos de vista, em especial devemos citar Gottlob Frege e Henri Poincaré. Para este, "o caráter essencial do raciocínio por recorrência é que ele contém condensados, por assim dizer, em uma única fórmula, uma infinidade de silogismos" (Poincaré, 1988, p. 26), isto é, traduzido em símbolos:

$P(1)$;
$P(1) \Rightarrow P(2)$, logo, $P(2)$;
$P(2) \Rightarrow P(3)$, logo, $P(3)$;
etc.

O salto interpretativo desta formulação para a versão (1) do princípio de indução é outro exemplo de salto arquimediano. Essa diferença de sentido entre a versão (1) e esta reflete e dá significado à diferença entre “para cada” e “para todos”, um problema não apenas lógico senão também epistemológico.

De outro ponto de vista, Frege considera os princípios da aritmética como sendo todos analíticos, o que reflete seu logicismo, enquanto que Poincaré considera o princípio de indução um típico juízo sintético *a priori*. Ele diz que “essa regra, inacessível à demonstração analítica e à experiência, é exatamente o tipo de juízo sintético *a priori*” (Poincaré, 1988, p. 28), o que é uma expressão do caráter não intuitivo desse princípio e abre a possibilidade de adotá-lo, por um ato de interpretação, como constituinte da estrutura da aritmética; de fato, um salto arquimediano.

Javier de Lorenzo analisa o pensamento de Poincaré a respeito do princípio de indução, e descreve o raciocínio por recorrência como consistindo de três passos fundamentais: o passo básico, o passo indutivo e o que ele chama de “fechamento”, isto é, a conclusão dos dois primeiros, sendo que este último incorpora a “virtude criadora” (Lorenzo, 1974, p. 70) do processo.

> O que se obtém não é por mera decomposição ou análise dos dois primeiros passos ou premissas, senão mediante uma síntese das mesmas, mediante uma construção que caracteriza um processo inteiro e autenticamente criador (Lorenzo, 1974, p. 70).

Para Lorenzo, então, seguindo Poincaré, “a recorrência mostra-se como um processo criador, construtivo e, por conseguinte, sintético” (1974, p. 68), e acrescenta: “o mecanismo de recorrência mostra-se [portanto] como anterior e irredutível à lógica” (1974, p. 77).

5 O salto do infinito potencial ao infinito atual

Um dos exemplos mais reveladores de como a simplicidade é usada como argumento na história da matemática, em especial na constituição do conhecimento geométrico, envolvendo novamente o conceito de infinito, está relacionado com o axioma v ou das paralelas da geometria euclidiana plana e com sua aceitação como "verdade" no pensamento grego.

Comecemos observando que, para os gregos, a reta geométrica devia ser finita, porém prolongável em ambos os sentidos "quanto se quiser", isto é, a reta euclidiana seria potencialmente infinita. Há dois tipos de infinito que já os gregos, desde Aristóteles, diferenciaram:

> (a) o infinito potencial, ou infinito *em potência*, por exemplo, o infinito dos números naturais em sua gênese indutiva, um após outro sem fim: 1, 2, 3, 4, 5,...; e
> (b) o infinito atual, ou infinito *em ato*, isto é, o infinito acabado, totalizado, captado ou apreendido como totalidade, por exemplo, o infinito do conjunto dos números naturais pensados simultaneamente: {1, 2, 3, 4, 5, 6,...}.

Repare-se que colocar todos os números naturais em um conjunto é dar um contexto a seus elementos, é criar uma nova entidade que dá identidade a seus elementos. É como reunir uma coleção de pessoas em uma nação, sendo esta a atribuição de uma identidade a todos seus membros. Os conjuntos são formas de atribuir contexto a coleções de objetos mudando assim seu estatuto ontológico.

A geometria *à la* Euclides tinha um forte caráter construtivo, onde a palavra chave era *traçar*. Vejamos: primeiro, repare-se que a noção grega de *reta* é, na realidade, "segmento de reta" ou "reta finita", como sugerem as seguintes definições:

> Uma linha [reta] é um comprimento sem largura e as extremidades de uma linha [reta] são pontos (Euclides, 2009, p. 97).

Os axiomas euclidianos que confirmam essa afirmação, além da menção das "extremidades" de uma reta, como acima, são os seguintes:

> Pode-se traçar uma reta de um ponto qualquer a outro qualquer e pode-se prolongar uma reta limitada em ambos os sentidos quanto se quiser (Euclides, 2009, p. 98).

Veja-se que a reta grega é infinita em potência, porém, não o é em ato, pois se uma reta for pensada como realizada em sua totalidade, como poderia ser prolongada? O aspecto construtivo da geometria euclidiana reflete-se nos instrumentos gregos de construção que são a régua e o compasso, os quais são concretizações físicas da reta finita e da circunferência. As construções geométricas eram realizadas com segmentos de reta e circunferências com as restrições dadas pelos postulados. Dentro desse espírito de finitude surge um conflito: o axioma das paralelas requer a reta infinita realizada em sua totalidade. Para Euclides é evidente que a reta podia ser arbitrariamente grande, porém não é evidente que ela seja infinita em ato. A aceitação da reta infinita no sentido atual, isto é, como totalidade, é um recurso de simplicidade e, portanto, de caráter estético.

No pensamento axiomático euclidiano, a reta infinita em ato não é sequer "imaginada" por ser, a sua concepção, problemática do ponto de vista construtivo pois possivelmente sua construção envolveria um número infinito de passos. Essa problematização manifesta-se no questionamento sobre a aceitação do famoso quinto postulado, o das paralelas, pois ele supõe, a princípio, a construção de uma sequência de prolongamentos de reta que eventualmente poderia ser infinita. Vejamos:

> se uma reta, caindo sobre outras duas, forma ângulos internos, de um mesmo lado, menores do que dois ângulos retos, então, essas duas retas, *prolongadas ilimitadamente*, encontram-se do lado mencionado (Euclides, 2009, p. 98, grifo nosso).

Repare-se que o postulado mencionado afirma a existência do limite do processo de prolongamento o qual só existiria se o infinito de um tal processo for um infinito atual e não apenas potencial. O axioma das paralelas é qualificado, então, como não-evidente por ser sua verdade de difícil visualização.

Os gregos dominaram o infinito potencial, porém aceitaram com receio o infinito atual. Por exemplo, a demonstração, incluída nos *Elementos* de Euclides, da infinidade dos números primos, que foi feita por redução ao absurdo, é, na realidade, uma prova da infinidade potencial deles, pois para qualquer coleção finita de primos constrói-se um primo maior que todos eles.

Modernamente, a prova de que há infinitos números racionais entre dois dados é também uma prova da infinidade potencial deles, pois baseia-se na repetição indutiva da existência de um de cada vez. Com efeito, se a e b são números racionais e $a < b$, tomando $c = (a + b)/2$ temos que $a < c < b$. Esse processo repetido sucessivamente em intervalos cada vez menores, por exemplo $[a , c]$ ou $[c , b]$, nos dá um conjunto de números racionais entre a e b infinito em potência. A densidade da reta racional só requer, então, o infinito potencial.

Em contraste, a demonstração, *à la* Cantor, da existência de números irracionais entre dois racionais dados, usa argumentos de cardinalidade mostrando, de fato, que existe em ato um conjunto infinito de irracionais nesse intervalo. A continuidade da reta real, em contraste com sua densidade, envolve o infinito atual. Ainda, no caso das sequências, a aceitação ontológica de uma sequência infinita como coisa terminada é também um recurso de simplicidade como o é a aceitação do infinito atual. O estatuto ontológico dos números irracionais baseia-se nisso, por exemplo, o número irracional $\sqrt{2}$ só existe na medida em que sua expressão decimal for admitida completa e terminada na sua infinitude. Na análise matemática clássica, o resultado de um processo de passagem ao limite é aceito como entidade, apelando a um argumento de simplicidade, desde que seja aceito o infinito atual.

A discussão sobre a dialética real/hiperreal (não com esse nome) é muito antiga e tem seus inícios nos paradoxos de Zenão, e ainda não esclareceu seus principais problemas. A lógica matemática moderna talvez forneça argumentos para mostrar que alguns deles jamais serão resolvidos adequadamente.

Um reflexo dessa situação de impossibilidade é dado no contexto da teoria axiomática de Zermelo-Fraenkel (*ZFC*, *ZF* com o axioma da escolha), considerada o fundamento da matemática moderna, na chamada *hipótese do contínuo*. Essa hipótese ou conjetura afirma que os diversos subconjuntos infinitos de números reais só podem ter cardinalidade enumerável ou a do contínuo, isto é, a do próprio conjunto dos números reais. Foi provado que essa hipótese é independente dos demais axiomas de *ZFC* e, portanto, o fato de existirem ou não subconjuntos com cardinalidades intermediárias é indecidível. Isso pode ser entendido como a impossibilidade de conhecer a verdadeira estrutura da reta euclidiana, significando isso que há na matemática uma real impossibilidade epistemológica. Por sinal, uma propriedade é dita indecidível a partir de uma teoria se nem ela nem sua negação são dedutíveis dos axiomas dessa teoria. Um outro resultado de indecidibilidade na teoria dos conjuntos infinitos (em ato), especialmente dos conjuntos não-enumeráveis, onde as intuições são menos aprimoradas, permite-nos encontrar outras situações de salto arquimediano: é o caso da existência dos chamados 'cardinais grandes'. Discutiremos, em especial, o caso dos cardinais inacessíveis.

Um cardinal λ é dito inacessível se $\lambda > \aleph_0$ (o cardinal dos conjuntos enumeráveis) e satisfaz as seguintes condições: a) para todo cardinal $\eta < \lambda$, $2^\eta < \lambda$; e b) para toda família de cardinais $\{\eta_i\}_{i \in I}$ com $|I| < \lambda$ e cada $\eta_i < \lambda$, temos que $\bigcup_{i \in I} \eta_i < \lambda$.

A existência ou não de cardinais inacessíveis não pode ser demonstrada dentro da teoria *ZFC* pois contradiria a impossibilidade, segundo Gödel, de provar a consistência de uma teoria dentro da própria teoria, já que esses cardinais são "muito grandes" e, de certa forma, espelham todo o universo dos conjuntos em um conjunto só.

Assumir, então, por ato de natureza platonista, a existência desse tipo de cardinais é um salto arquimediano na teoria *ZFC*, pois cria um princípio que, estendendo o universo dos conjuntos, o estrutura de uma outra maneira.

É fácil ver que $\aleph_0$ também satisfaz as condições (a) e (b) anteriores, porém ele não espelha o universo dos conjuntos dentro de si. No entanto, a existência de conjuntos enumeráveis também tem de ser postulada, na teoria *ZFC*, através de um axioma, o axioma do infinito, que garante a existência de conjuntos chamados "indutivos". Os "menores" conjuntos indutivos possíveis são, de fato, enumeráveis.

6 Características epistemológicas e cognitivas do salto arquimediano

Os exemplos apresentados nas seções anteriores mostram que o pensamento matemático está permeado por noções e argumentações de cunho epistemológico e estético, de caráter qualitativo.

Segundo Gilles Gaston Granger (cf. 1989, p. 30), há necessidade do conhecimento filosófico na ciência, e este só pode ser qualitativo. E podemos acrescentar que, enquanto o conhecimento científico lida com significações, exigindo de suas verdades, a universalidade, a objetividade, a racionalidade, ahistoricidade e neutralidade, isto é, sem compromisso com valores, o conhecimento filosófico, especialmente o conhecimento estético, lida também com os sentidos, cujas características, atreladas principalmente a discursos e interpretações, estão mais do lado da razão poética do que da razão científica. As metáforas, de uso mais frequente nas chamadas ciências humanas e sociais, do que nas ciências exatas ou naturais, também parecem ter essa natureza poética.

O salto arquimediano, assunto deste ensaio, é um exemplo importante de argumentação no campo do conhecimento qualitativo na matemática e, enquanto ato de interpretação, confere sentido aos resultados de sua aplicação.

O sentido carrega consigo um procedimento para a construção do objeto em consideração, ou um contexto para que esse objeto possa ser compreendido ou assimilado pela intuição. Para dar um exemplo trivial, as frações 3/12 e 4/16 têm sentidos diferentes porque expressam processos diferentes, porém um mesmo significado: o número 1/4 ou 0,25 (independentemente da representação), assim como "a estrela da manhã" e "a estrela da tarde" têm sentidos diferentes significando ambas o planeta Vênus.

Sintetizando as ideias discutidas nas seções anteriores através dos exemplos, o salto arquimediano apresenta-se como um processo e, como tal, podemos entendê-lo, em uma primeira aproximação, como a passagem do intuitivo ao lógico, do epistemológico ao ontológico. Mais ainda, o salto arquimediano é um processo criador que produz juízos sintéticos *a priori* para a matemática, juízos que, do ponto de vista da lógica matemática moderna, permitiriam decidir em um sentido ou em outro, sobre a estrutura de um certo universo, situações virtualmente indecidíveis.

Do ponto de vista cognitivo, já que a intuição está sempre em jogo, podemos dizer que o salto arquimediano é uma espécie de fechamento *gestáltico* de um processo que poderia ser complexo, é um ímpeto da mente humana para contornar, limitar e ordenar certos procedimentos. Para Platão, o limitado é perfeito, enquanto que o ilimitado é imperfeito por ser incompleto. A possibilidade (ou a necessidade) do salto arquimediano talvez surja devido a que nossa intuição tem limites, e a mente humana precisa de um fechamento para driblar esses limites.

José Carlos CIFUENTES
Professor Doutor do Departamento de Matemática,
Universidade Federal do Paraná, Brasil.
jccifa@ufpr.br

ABSTRACT

In this paper we introduce the concept of "archimedian leap" as a non deductive argumentation process in mathematics which produces an epistemological rupture in the direction of giving objectivity to certain mathematical facts. We also discuss the qualitative character of archimedian leap emphasizing its hermeneutical function in mathematical thought and its relation with an aesthetical knowledge in mathematics. Some examples of epistemological ruptures produced by an archimedian leap, among others, are the following: (1) the archimedian property of the real line, which structures the Euclidean line through the real number system; (2) the complete induction principle of the theory of natural numbers, which models our intuition about recursive processes; (3) the passage of potential infinite to actual infinite, which permits giving an objective content to the theory of infinite sets and cardinalities.

KEYWORDS • Archimedian leap. Archimedian property. Epistemological rupture. Mathematical myths. Mathematical aesthetics.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, G. *O novo espírito científico*. 3 ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000.

____. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2003.

BARTHES, R. et al. (Ed.). *Atualidade do mito*. São Paulo: Duas Cidades, 1977.

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: "a teoria das proporções e o método de exaustão". *União. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, p. 91-110, 2005.

CIFUENTES, J. C. *Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático*. *Boletim do GEPEM*, 46, p. 55-72, 2005.

____. O conhecimento qualitativo numa epistemologia da educação científica e matemática. *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM*. Brasília: UC, CD-ROM, 2009. 20 p.

Cifuentes, J. C. Do conhecimento matemático à educação matemática: uma "odisséia espiritual". In: Clareto, S. M. et al. (Org.). *Filosofia, matemática e educação matemática: compreensões dialogadas*. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2010. p. 13-32.

Clareto, S. M. et al. (Org.). *Filosofia, matemática e educação matemática: compreensões dialogadas*. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2010.

Diderot, D. De la grace, de la négligence et de la simplicité. In: ____. *Traité du beau, suivi de essai sur la peinture et pensées détachées sur la peinture*. Verviers: Gérard, 1973. p. 177-9.

Euclides. *Os elementos*. Tradução I. Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

González, U, P. M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo xvii*. Madrid: Alianza, 1992.

Goodman, N. *Ciência e simplicidade*. In: Morgenbesser, S. (Org.). *Filosofia da ciência*. São Paulo: Cultrix, 1975. p. 231-44.

Granger, G. G. *Por um conhecimento filosófico*. Campinas: Papirus, 1989.

Grimberg, G. E. Parmênides e a matemática. *Anais de Filosofia Clássica. Revista do Programa de Pós-graduação em Filosofia da UFRJ*, 1, 1, p. 55-68, 2007.

Hilbert, D. *Fundamentos da geometria*. Tradução A. J. F. de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

Lamouche. A. *Le principe de simplicité dans les mathématiques et dans les sciences physiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1954.

Lavalle, P. *O mito em matemática*. In: Barthes, R. et al. (Ed.). *Atualidade do mito*. São Paulo: Duas Cidades, 1977. p. 191-203.

Lionnais, F. (Org.). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba, 1965.

Lionnais, F. *La belleza en matemáticas*. In: ____. (Org.). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba, 1965. p. 464-94.

Lorenzo, J. *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré*. Madrid: Tecnos, 1974.

____. A ciência do infinito. *Scientific American Brasil, Edição Especial*, 15, p. 6-13, 2001.

Morgenbesser, S. (Org.). *Filosofia da ciência*. São Paulo: Cultrix, 1975.

Poincaré, H. *A ciência e a hipótese*. 2 ed. Brasília: Editora da UnB, 1988.

Popper, K. Simplicidade. In: ____. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo: Cultrix, 1993. p. 148-59.